Übungsblatt zu Lektion 2

1) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Taschenrechner

a) $3x_1 = 3x_2 - 3x_3$
$2x_3 = 6 - 8x_1 - 10x_2$
$x_2 = 2x_1 + 3x_3 + 5$

b) $7y + 8x = 6z + 3$
$5z = 4y - 3$
$3y + 2z = x + 9$

2) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme allgemein in Abhängigkeit vom Parameter α mit dem Einsetzverfahren:

a) $3z + \alpha x - \alpha = 0$
$x + \alpha y = 1 + \alpha$
$y - \alpha z + 5 = 0$

b) $4 - 2\alpha - \alpha u + (2 + \alpha^2) \cdot w = \alpha^2 v$
$\alpha^2 v + \alpha u = 4 + \alpha$
$\alpha \cdot w - u + \alpha \cdot v = 0$

3) Bestimmen Sie aus folgendem Gleichungssystem die Variablen U_1, U_2, und I_a allgemein in Abhängigkeit von den Parametern R_0, R_S, R_L und U_e:

$$\frac{U_2 - U_1}{R_0} - \frac{U_1}{R_0} = 0 \qquad \frac{U_e - U_1}{R_0} - \frac{U_1 - R_L \cdot I_a}{R_0} = 0 \qquad \frac{U_2 - R_L \cdot I_a}{R_S} - I_a = 0$$

4) Beim elastischen Stoß zweier Massenpunkte m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten v_{1v} und v_{2v} vor dem Stoß ergeben sich die Geschwindigkeiten v_{1n} und v_{2n} nach dem Stoß aus dem Impulserhaltungssatz und aus dem Energieerhaltungssatz:

$$m_1 \cdot v_{1v} + m_2 \cdot v_{2v} = m_1 \cdot v_{1n} + m_2 \cdot v_{2n}$$

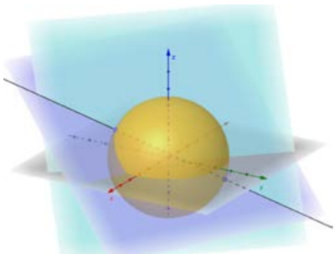
$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot {v_{1v}}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot {v_{2v}}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot {v_{1n}}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot {v_{2n}}^2$$

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten v_{1n} und v_{2n}, wenn $m_1 = 1[kg]$, $m_2 = 2[kg]$, $v_{1v} = 3\left[\frac{m}{s}\right]$ und $v_{2v} = -2\left[\frac{m}{s}\right]$.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeiten v_{1n} und v_{2n} allgemein in Abhängigkeit von m_1, m_2, v_{1v} und v_{2v}.

5) Das folgende Gleichungssystem beschreibt zwei Ebenen und eine Kugeloberfläche im 3-dimensionalen Raum:

$$x + y + z = a$$
$$x + 2y + 3z = b$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 + 2b^2$$



Bestimmen Sie die Schnittpunkte der 3 Flächen, indem Sie das Gleichungssystem allgemein in Abhängigkeit von a und b nach den Variablen x, y und z auflösen.

6) Die folgenden 4 Gleichungen beschreiben eine Glühlampe mit einem Widerstand R bei einer Temperaturerhöhung T gegenüber Umgebungstemperatur, die an eine Spannung U angeschlossen ist und dabei den Strom I und die Leistung P aufnimmt:

Leistungsaufnahme: $P = U \cdot I$

Ohmsches Gesetz: $U = R \cdot I$

Temperaturzunahme: $T = R_{th} \cdot P$

Temperaturabhängigkeit des Widerstandes: $R = R_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot T + \beta \cdot T^2\right)$

Die Parameter haben folgende typischen Werte:

U = 230V

R_{th} = 25K/W (thermischer Widerstand)

R_0 = 40Ω (Widerstand bei Raumtemperatur)

$\alpha = 4\times10^{-3}\,K^{-1}$ (linearer Temperaturkoeffizient von Wolfram)

$\beta = 1\times10^{-6}\,K^{-2}$ (quadratischer Temperaturkoeffizient von Wolfram)

Eliminieren Sie aus dem Gleichungssystem die Variablen P, T und R, lösen Sie die verbleibende Gleichung für die Variable I numerisch mit den angegebenen Parameterwerten und bestimmen Sie die übrigen Variablen durch Rücksubstitution. Aus physikalischen Gründen müssen alle Variablen positiv sein.

7) Die folgenden 5 Gleichungen beschreiben die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes R_{1T} und R_{2T} von zwei Kaltleitern, ihr thermisches Gleichgewicht bei den Temperaturdifferenzen T_1 und T_2 zur Umgebung und den Strom I bei ihrer Reihenschaltung:

$$R_{1T} = R_1 \cdot \left(1 + \alpha_1 \cdot T_1\right) \qquad R_{2T} = R_2 \cdot \left(1 + \alpha_2 \cdot T_2\right)$$

$$R_{1T} \cdot I^2 = \frac{T_1}{R_{th1}} \qquad R_{2T} \cdot I^2 = \frac{T_2}{R_{th2}} \qquad R_{1T} \cdot I + R_{2T} \cdot I = U$$

Die Parameter besitzen folgende typischen Werte:

R_1 = 10Ω $\alpha_1 = 0.02K^{-1}$ R_{th1} = 20K/W

R_2 = 20Ω $\alpha_2 = 0.05K^{-1}$ R_{th2} = 5K/W U = 24V

Eliminieren Sie aus dem Gleichungssystem die Variablen T_1, T_2, R_{1T} und R_{2T}, lösen Sie die verbleibende Gleichung für die Variable I numerisch mit den angegebenen Parameterwerten und bestimmen Sie die übrigen Variablen durch Rücksubstitution. Aus physikalischen Gründen müssen alle Variablen positiv sein.

8) Aus einem Winkeleisen mit einer Länge L soll eine quaderförmige Gitterbox zusammengeschweißt werden, deren Rauminhalt V und deren Oberfläche F beträgt. Wie groß müssen die Seitenlängen a, b und c des Quaders bei L = 20m, V = 2m³ und F = 12m² gewählt werden?

Stellen Sie 3 Gleichungen für die Variablen a, b und c mit den Parametern L, V und F auf, eliminieren Sie mit dem Einsetzverfahren zwei Variable, lösen Sie die letzte Gleichung mit den angegebenen Parameterwerten numerisch und bestimmen Sie die übrigen Variablen.