



Fleißige Biber (*Busy Beaver*, T. Radó, 1962)

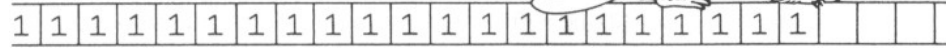
Ein **fleißiger Biber** BB_n ist eine deterministische TM

- mit n Zuständen (plus einem zusätzlichen Haltezustand z_F)
- mit Bandalphabet $\Gamma = \{\#, 1\}$
- mit anfänglich leerem Band ($w = \varepsilon$)
- welche maximal viele **Einsen schreibt**
- und dann **hält** (Endlosschleife unzulässig!).

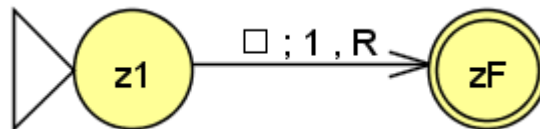
Wie groß ist k_n , die maximale Anzahl an Einsen für BB_n ?

Die **Fleißige-Biber-Funktion** ist die Abbildung $BB: n \rightarrow k_n$.

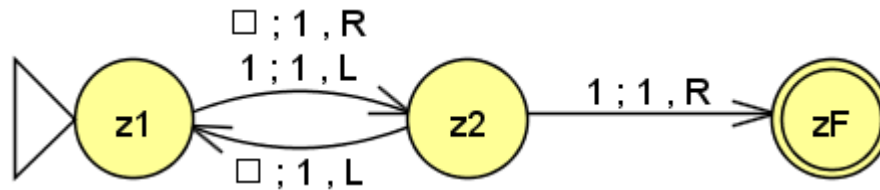
Berechenbarkeit



Bsp.: BB-1, ein fleißiger Biber für $n = 1$.



Bsp.: BB-2, ein fleißiger Biber für $n = 2$.



- ▶ *Welche Konfigurationen durchläuft BB-2?*
- ▶ *Entwerfen Sie BB-3.*

Berechenbarkeit



BB-n	#	1
z_1	$(z_i, \#/1, R/L)$...
z_2
...
z_F	$./.$	$./.$

Die Anzahl t_n aller Kandidaten für BB-n lässt sich aus der Übergangstabelle herleiten.

Diese hat $2 \cdot n$ Einträge:
In jedem der n Zustände wird entweder # oder 1 gelesen.

Jeder Tabelleneintrag spezifiziert

- einen von $n+1$ Folgezuständen z_i
- eins von zwei Zeichen, die geschrieben werden (# oder 1)
- eine von zwei Bewegungsrichtungen (L oder R).

$$\Rightarrow t_n = ((n+1) \cdot 2 \cdot 2)^{2n}$$

Berechenbarkeit



Die Fleißige-Biber-Funktion BB wächst schneller als jede berechenbare Funktion, sie kann daher **nicht berechenbar** sein.

Eine automatische Berechnung von k_n scheitert nicht an der exponentiell wachsenden Anzahl t_n der möglichen TMs, sondern auch für kleine n am **Halteproblem**:

Es lässt sich algorithmisch nicht feststellen, ob eine TM in einer Endlosschleife Einsen schreibt oder nicht.

n	t_n	k_n
1	64	1
2	20736	4
3	16777216	6
4	$\approx 10^{10}$	13
5	$\approx 10^{13}$	≥ 4098
6	$\approx 10^{17}$	$> 10^{18276}$
7	$\approx 10^{21}$	wjvGuB

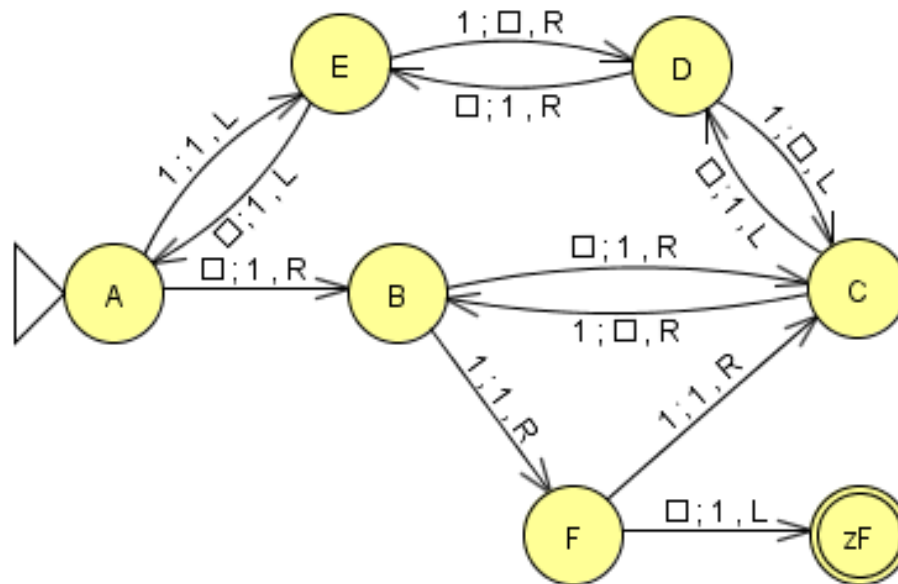
Berechenbarkeit



Der Fleißige-Biber-Kandidat für $n = 6$:

$k_n \approx 3.5 \cdot 10^{18276}$, erreicht nach $\approx 7.4 \cdot 10^{36534}$ Schritten

(Pavel Kropitz, Bachelorarbeit, Karls-Universität Prag, 2010)



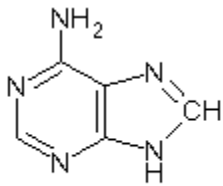
CFLs in der Bioinformatik

Kontextfreie Grammatiken in der Molekularbiologie

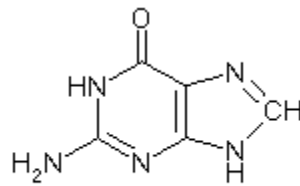
Das Erbmateriale wird metaphorisch gerne als „Buch des Lebens“ bezeichnet. Träger der Erbanlagen (Gene) ist die **DNA**.

Die DNA besteht aus vier Basen (**Nukleotide** = unser Alphabet) – Adenin, Cytosin, Guanin, Thymin (a, c, g, t bzw. u) – deren Aneinanderreihung den **genetischen Code** bildet.

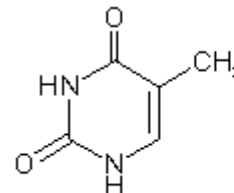
Es ist nahe liegend, die Nukleotidketten (= die Worte im Buch des Lebens) als formale Sprache zu beschreiben.



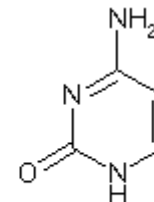
Adenine (A)



Guanine (G)



Thymine (T)



Cytosine (C)

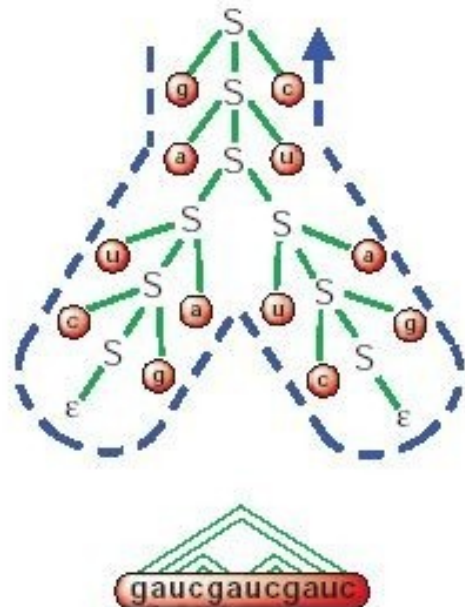
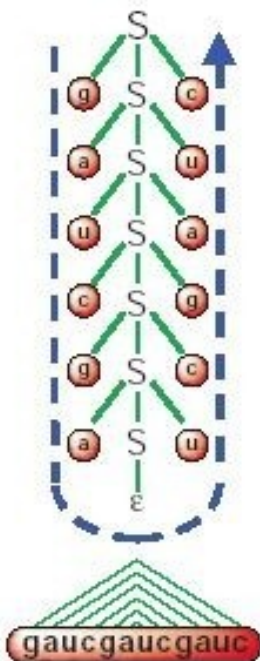
CFLs in der Bioinformatik

Die DNA besteht aus Doppelsträngen, so dass die Nukleotide **paarweise** auftreten, und zwar g zusammen mit c sowie a zusammen mit u.

Dies lässt sich leicht mit einer kontextfreien Grammatik beschreiben:

$$S \rightarrow gSc \mid cSg \mid aSu \mid uSa \mid \varepsilon$$

Die hierdurch erzeugten Strukturen sind gerade Stränge, Bild links.



Durch Hinzunahme der Regel

$$S \rightarrow SS$$

lassen sich Verzweigungen der DNA modellieren.

Die Grammatik ist dann **zweideutig**:

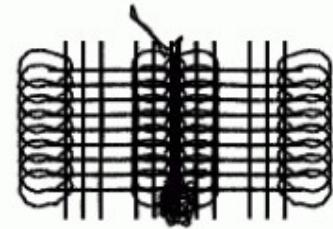
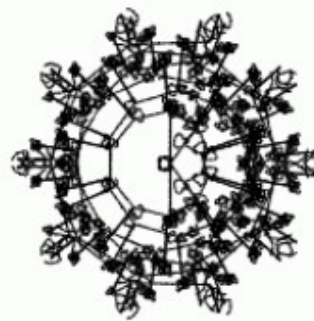
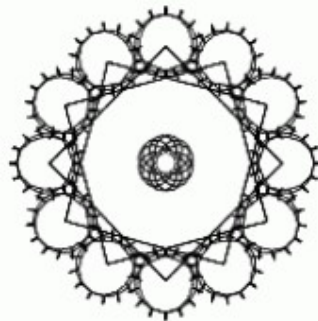
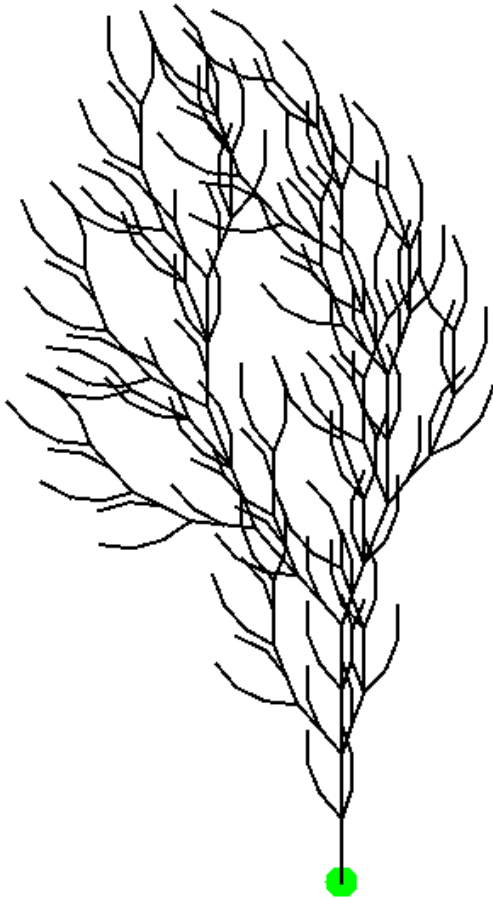
Die Nukleotidkette `gaucgaucgauc` hat zwei verschiedene Ableitungen.

Quelle: David Searls, *The Language of Genes*, Nature, Vol. 420, 14 Nov 2002.

L-Systeme, Schildkrötengrafik

Formale Sprachen können u.a. verwendet werden

- zur Beschreibung des Wachstums von Pflanzen (**L-Systeme**, nach Aristid Lindenmayer, Biologe)
- in der Computergrafik zur Generierung von regelmäßigen Objekten. Man spricht dort von **Formengrammatiken**.



Quelle: Lewis et al., *VisualIds*, SIGGRAPH 2004.

Formale Grammatiken $G = (V, \Sigma, P, S)$ erzeugen Zeichenketten.

Man kann nun jedem Symbol eine grafische Aktion zuordnen.

Für $\Sigma = \{d, f, +, -\}$ sei die Zuordnung wie folgt:

- d : Zeichne eine Linie der Länge 1 in die aktuelle Richtung.
- f : Gehe eine Strecke der Länge 1, ohne zu zeichnen.
- $+$: Ändere die aktuelle Richtung um den Winkel α nach links.
- $-$: Ändere die aktuelle Richtung um den Winkel α nach rechts.

Der Drehwinkel α ist ein Parameter der Formengrammatik.

Anfangspunkt und Anfangsrichtung werden beliebig festgelegt.

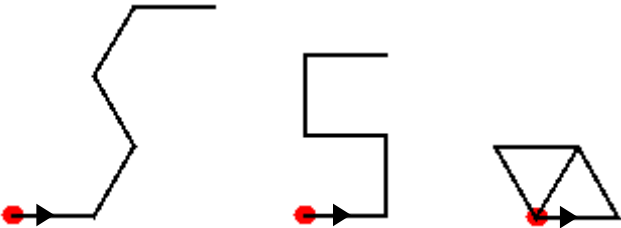
Diese Abbildung wurde von Seymour Papert als

Schildkrötengrafik in die Sprache Logo (1966) integriert.

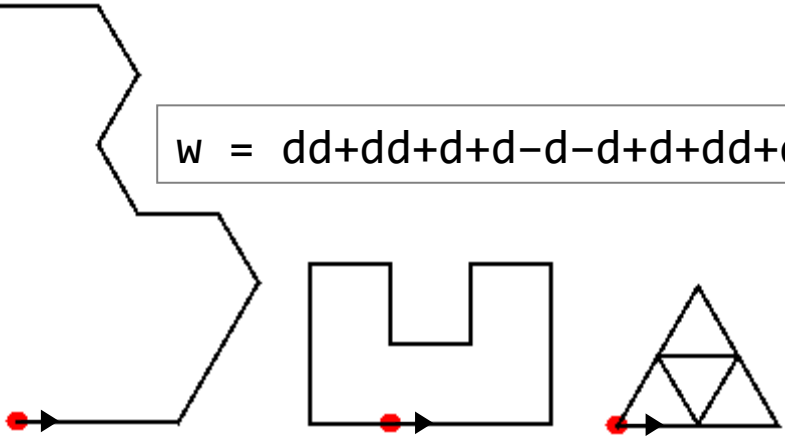
Formengrammatiken

Beispiele für Schildkrötengrafik: Die Worte $w \in \Sigma^*$ repräsentieren Folgen von grafischen Aktionen.

$w = d+d+d-d-d$



$w = dd+dd+d+d-d-d+d+dd+d$



- (l) $\alpha = 60^\circ$
- (m) $\alpha = 90^\circ$
- (r) $\alpha = 120^\circ$

Besonderheiten der L-Systeme:

- Bei L-Systemen (= *parallel rewriting systems*) wird die gewählte **Ersetzungsregel** zeitgleich (= **parallel**) auf sämtliche passenden Variablen angewendet.
- L-Systeme starten von einer Zeichenkette (**Axiom**) aus. Diese kann aus nur einer Variablen bestehen (z.B. S), kann aber auch eine Sentenz sein (z.B. $S+S+S+S$).

Die parallelen Ersetzungsregeln sind biologisch motiviert: Eine Pflanze wächst gleichzeitig in allen Zellen.

Bsp.: Mit der Ersetzungsregel $S \rightarrow S--S$ kann man aus dem Axiom $S+S+S+S$ die Sentenz $S--S+S--S+S--S+S--S$ ableiten, nicht jedoch $S--S+S+S+S$.

Formengrammatiken



Mit **Verzweigungen**, notiert mittels eckigen Klammern $[\]$, kann man Grafiken von Pflanzen generieren:

- Öffnende Klammer = Beginn eines Seitenastes
- Schließende Klammer = Rückkehr zur Verzweigung.

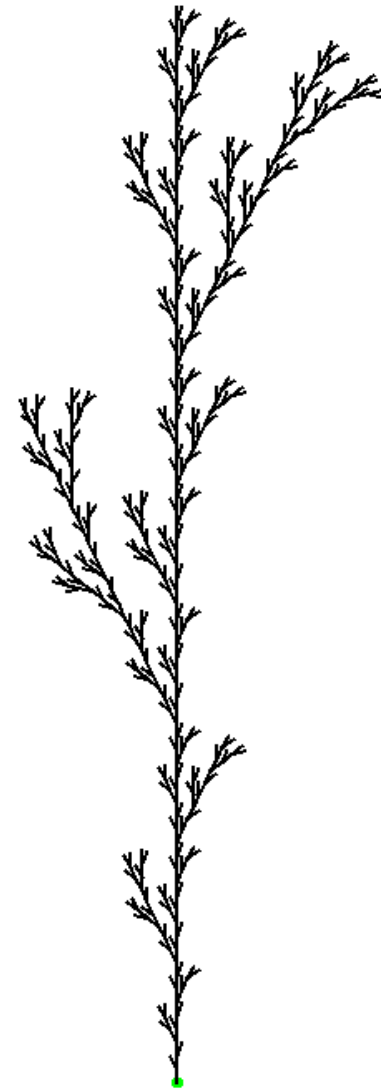
Die Ersetzungsregeln für das nebenstehende Unkraut:

$$S \rightarrow S[+S]S[-S]S \mid d \quad \text{mit } \alpha = 25.7^\circ \text{ und Axiom} = S.$$

Realistischer aussehende Pflanzen lassen sich durch zufällig ausgewählte Ersetzungsregeln erzeugen.

Zahlreiche Erweiterungen sind denkbar: Linienlängen, Winkel, Linienfarben, Linienbreiten, Linienstile usw. können parametrisiert und randomisiert werden.

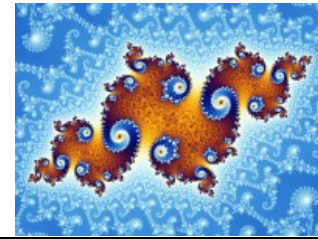
Literaturtipp: P. Prusinkiewicz / A. Lindenmayer,
The Algorithmic Beauty of Plants, 1990.



Formengrammatiken

Farne sind selbstähnliche Pflanzen:
Aus dem spiralförmigen *Koru*
entwickelt (sic!) sich der Hauptstamm.
Von diesem abzweigend entwickeln
sich nach demselben Muster die
Blätter, usw.





L-Systeme eignen sich zur Konstruktion von **fraktalen** Kurven, da diese **selbstähnlich** sind, d.h. das Ganze ähnelt seinen Elementen.

Fraktale Kurven können ungewöhnliche Eigenschaften haben:

- Die Koch-Kurve (bzw. Koch-Schneeflocke) ist **überall stetig**, aber **nirgendwo differenzierbar**.
- Die Koch-Insel hat **endliche Fläche**, aber **unendlichen Umfang**.
- Die Gosper- und Hilbert-Kurven sind **flächenfüllende** oder gar **raumfüllende Linien**.

Formengrammatiken

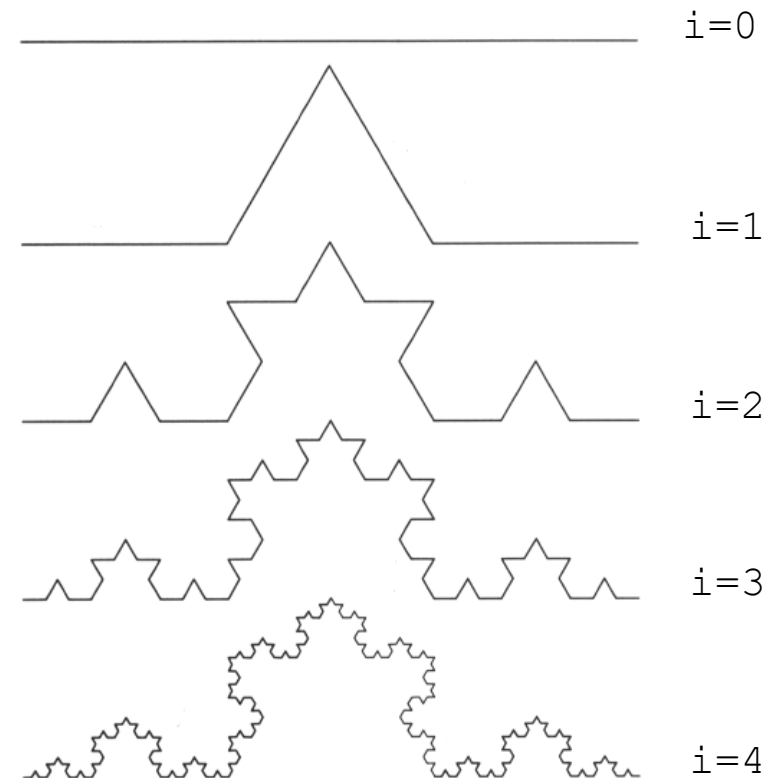
Konstruktion der **Koch-Kurve**:

Die Ersetzungsregel für die Koch-Kurve ist $S \rightarrow S+S--S+S \mid d$, $\alpha = 60^\circ$.

Das Axiom ist S . Die Ersetzungsregel $S \rightarrow d$ generiert die Gerade $w = d$.

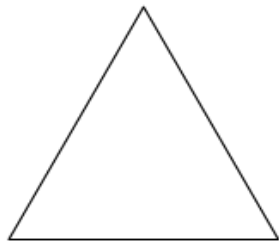
Die erste Iteration ergibt $S+S--S+S$, woraus sich $w = d+d--d+d$ erzeugen lässt.

Die zweite Iteration ergibt die Sentenz $S+S-S+S+S+S-S+S--S+S--S+S+S+S--S+S$, usw.

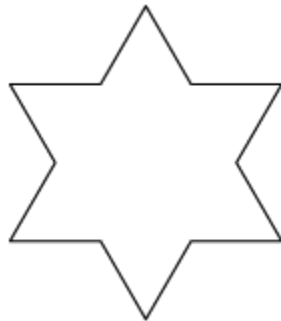


Formengrammatiken

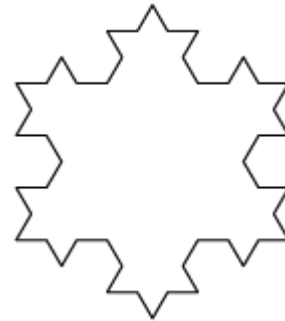
Startet man mit dem Axiom $S--S--S$,
so ergibt sich die Koch-Schneeflocke:



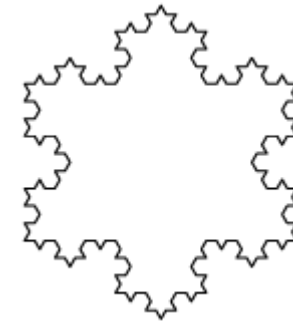
$i=0$



$i=1$

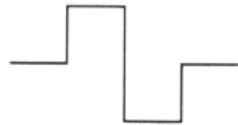
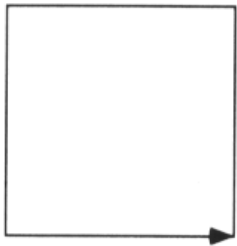


$i=2$



$i=3$

$i=0$



Konstruktion der **Koch-Insel**:

Die Ersetzungsregel, mit $\alpha = 90^\circ$, ist
 $S \rightarrow S+S-S-SS+S+S-S \mid d.$

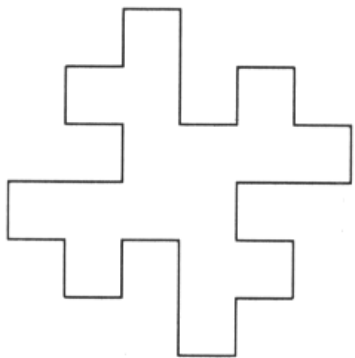
Das Axiom ist das Quadrat $S+S+S+S.$

Die erste Iteration ergibt die Sentenz
 $S+S-S-SS+S+S-S+S+S-S-S-SS+S+S-S+$
 $S+S-S-SS+S+S-S+S+S-S-S-SS+S+S-S.$

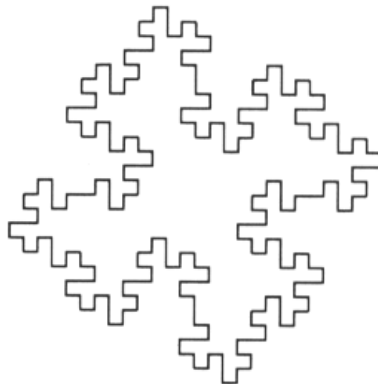
Jede Iteration lässt die Fläche konstant,
verdoppelt jedoch den Umfang.

Nach unendlich vielen Iterationen hat
die Insel also immer noch dieselbe
Fläche, aber unendlichen Umfang!

$i=1$



$i=2$

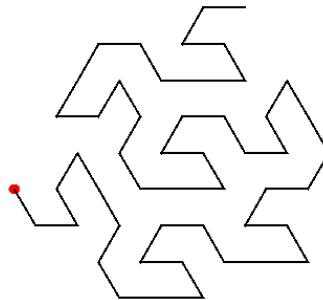


Formengrammatiken

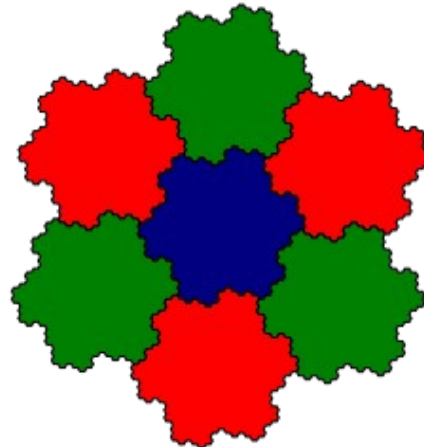
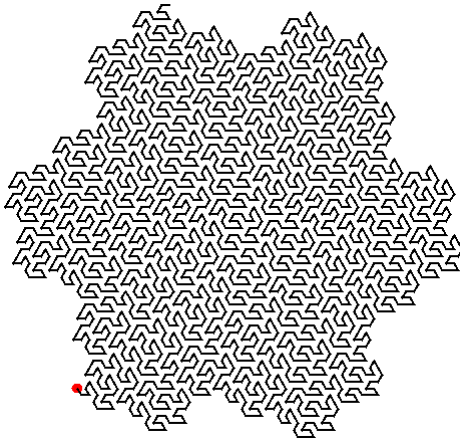
i=1



i=2



i=4



Konstruktion der **Gosper-Kurve** („flowsnake“)

Die Ersetzungsregeln, mit $\alpha = 60^\circ$, Axiom = S, sind

$S \rightarrow L$

$R \rightarrow R+L++L-R--RR-L+ \mid d$

$L \rightarrow -R+LL++L+R--R-L \mid d.$

Die ersten Iterationen mit **simultaner Anwendung der R- und L-Regel** ergeben

$S \rightarrow L \rightarrow -R+LL++L+R--R-L \rightarrow$
 $-R+L++L-R--RR-L++-R+LL+$
 $+L+R--R-L-R+LL++L+R--R-L+$
 $+ -R+LL++L+R--R-L+R+L++L-$
 $R--RR-L+--R+L++L-R--RR-$
 $L+--R+LL++L+R--R-L$

Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Gosper_curve
 Autor: Inductiveload, Public Domain.

Formengrammatiken

Konstruktion der **Hilbert-Kurve**:

Axiom = S,

Ersetzungsregeln, mit $\alpha = 90^\circ$:

$S \rightarrow L$

$R \rightarrow -Ld+RdR+dL- \mid \epsilon$

$L \rightarrow +Rd-LdL-dR+ \mid \epsilon.$

Die ersten Iterationen mit **simultaner Anwendung der R- und L-Regel** ergeben

$S \rightarrow L \rightarrow +Rd-LdL-dR+ \rightarrow$

$+ -Ld+RdR+dL-d- +Rd-LdL-$

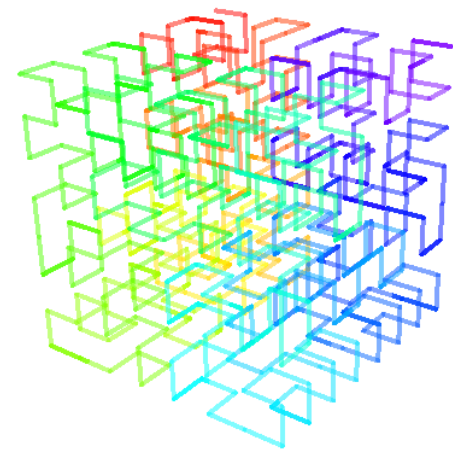
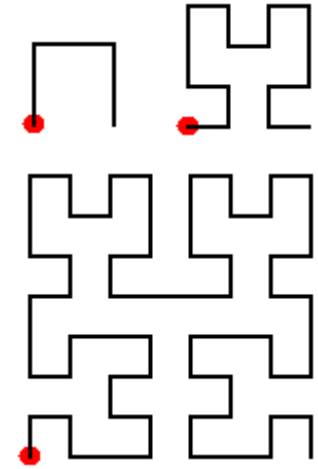
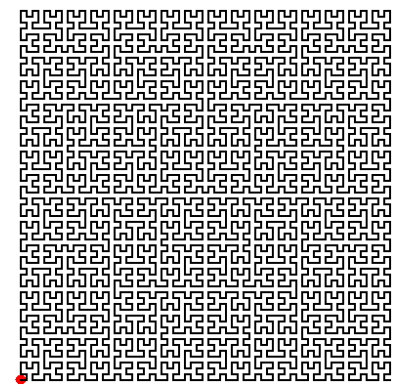
$dR+d+Rd-LdL-dR+-d$

$-Ld+RdR+dL-+ \rightarrow$

$+ -d+d+d-d-+d-d-d+d+d-d-d+-$

$d-d+d+d-d-+$

$i = 1, 2, 3, 6$

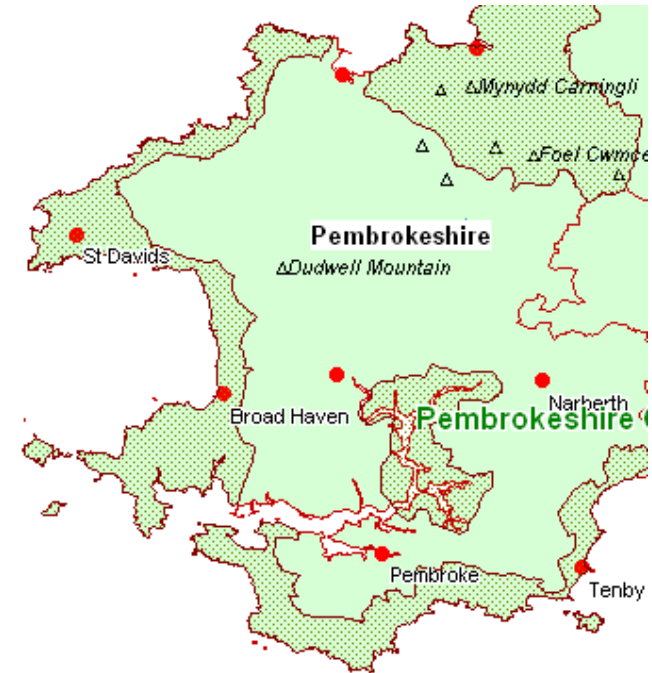
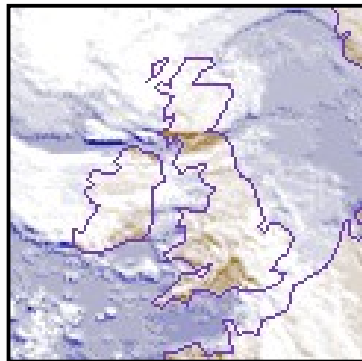


3d Hilbert-K.,
raumfüllend.
Farbe zeigt
Durchlauf an.

Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert_curve
Autor: Robert Dickau, CC BY-SA 3.0.

Formengrammatiken

How long is the coast of Britain?



B. Mandelbrot entdeckte 1967 wegen Inkonsistenzen bei der Angabe der Küstenlänge von Großbritannien, dass die Länge abhängig ist

- vom Verlauf der Küste
- vom Maßstab der Karte, die man verwendet (!!!).

Formale Sprachen im Behindertengleichstellungsgesetz (2002),
Verordnung zur Schaffung barrierefreier Informationstechnik (**BITV**):

*„Markup-Sprachen und Stylesheets sind entsprechend ihrer
Spezifikationen und formalen Definitionen zu verwenden. [...]*

*Mittels Markup-Sprachen geschaffene Dokumente sind so
zu erstellen und zu deklarieren, dass sie gegen veröffentlichte
formale Grammatiken validieren.“*

Validatoren können auf der Grundlage formaler Grammatiken prüfen,
ob öffnende HTML-Elemente (z.B. `<p>`, ``) durch entsprechende
schließende Elemente (`</p>`, ``) abgeschlossen werden, ob die
Schachtelung von Elementen korrekt ist, usw.

Zellularautomaten

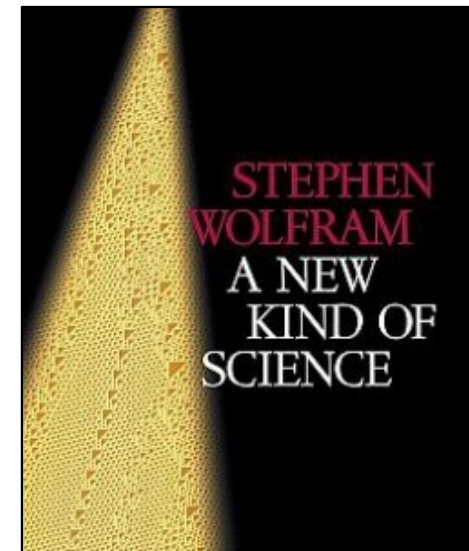
Zellularautomaten (ZA) bestehen aus unendlich vielen Zellen, welche in einem ein- oder mehrdimensionalen Gitter angeordnet sind. Der Zustand der Zellen hängt ab von den Zuständen der Nachbarzellen.

ZAs wurden eingeführt von S. Ulam (ca. 1944) zur Beschreibung des Wachstums von Kristallen.

J. v. Neumann (ca. 1966) griff die Idee auf, um selbstreproduzierende Automaten zu modellieren.

ZAs wurden populär durch das Spiel des Lebens (*Game of Life*) von John Conway (1968).

Seit ca. 1980 will S. Wolfram *Life, Universe, and Everything* auf Zellularautomaten zurück führen.



Ein **Zellularautomat (ZA)** ist ein Viertupel

$$A = (R, S, \nu, \delta) \text{ mit}$$

- einem unendlichen Zellarraum R (Zellmenge)
- einer endlichen Zustandsmenge S
- einer endlichen Nachbarschaftsfunktion $\nu: R \rightarrow R^n$
- und einer **Übergangsfunktion** $\delta: S \times S^n \rightarrow S$.

R ist meistens ein- oder zweidimensional.

S umfasst i.d.R. zwei Zustände, oft „tot“ und „lebendig“ genannt.

ν definiert in 2-d meistens eine 8-er Nachbarschaft (i.e. $n = 8$).

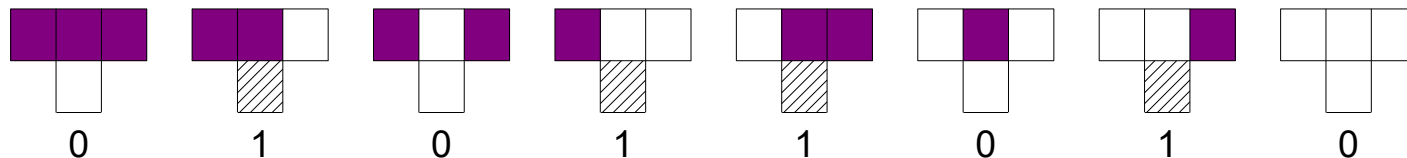
δ enthält die Regeln, nach denen aus dem aktuellen Zustand der Zelle und ihrer n Nachbarn der Folgezustand bestimmt wird.

Die Regeln werden **simultan** (parallel) auf alle Zellen angewendet.

Zellularautomaten

Bsp.: 1-d ZA „WC 90“. Dieser ist wie folgt definiert:

- Zellularraum R = eindimensional unendlich
- Zustandsmenge $S = \{\text{tot, lebendig}\}$
- Nachbarschaftsfunktion $v = \text{linker / rechter Nachbarn der Zelle}$
- Übergangsfunktion $\delta = \text{graphisch definiert mit folgenden Regeln:}$

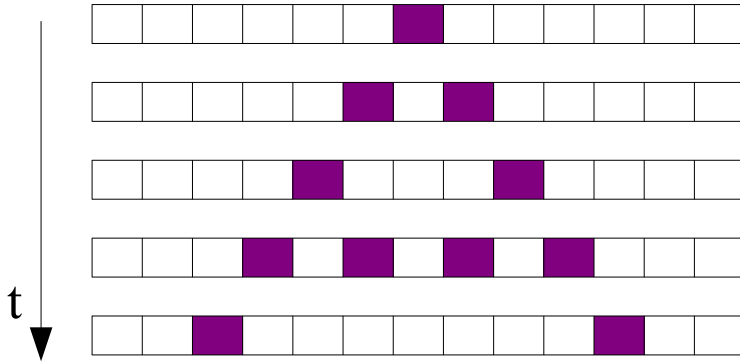


lebendig =
magenta =
schraffiert
= 1

Interpretation der ganz linken Regel: Ist die betreffende Zelle lebendig und beide Nachbarn ebenso, dann stirbt diese Zelle.

Die dezimale Interpretation des binären Ergebnismusters wird Wolfram-Code genannt (hier: 01011010 = 90), deshalb „WC 90“.

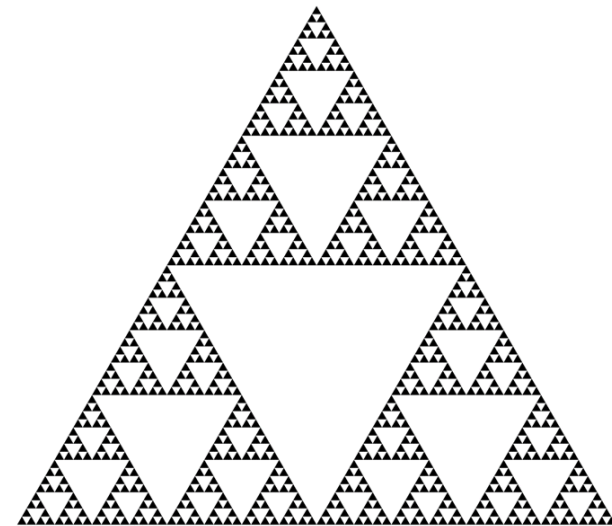
Zellularautomaten



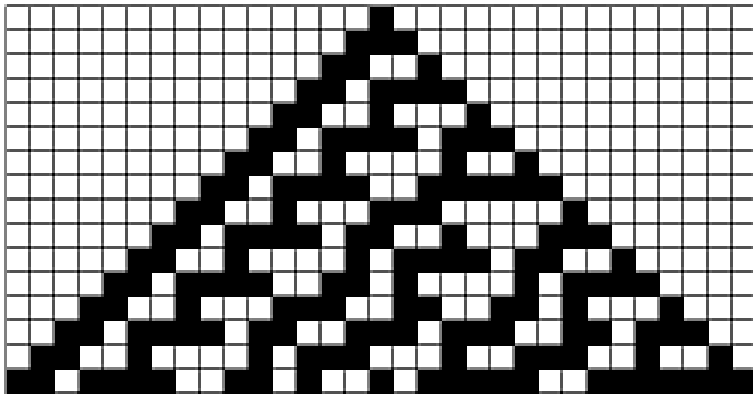
Die Graphik zeigt die ersten vier Iterationen des ZA WC 90, wenn die Startkonfiguration aus einer einzigen lebendigen Zelle besteht.

Bei Schritt vier deutet sich die selbstähnliche Natur dieses ZA an.

Füllt man die Ebene mit aufeinander folgenden Konfigurationen dieses ZAs (und ersetzt lebendige Zellen durch schwarze Dreiecke und tote Zellen durch umgedrehte weiße Dreiecke), so erhält man das selbstähnliche **Sierpinski-Dreieck** (1915).



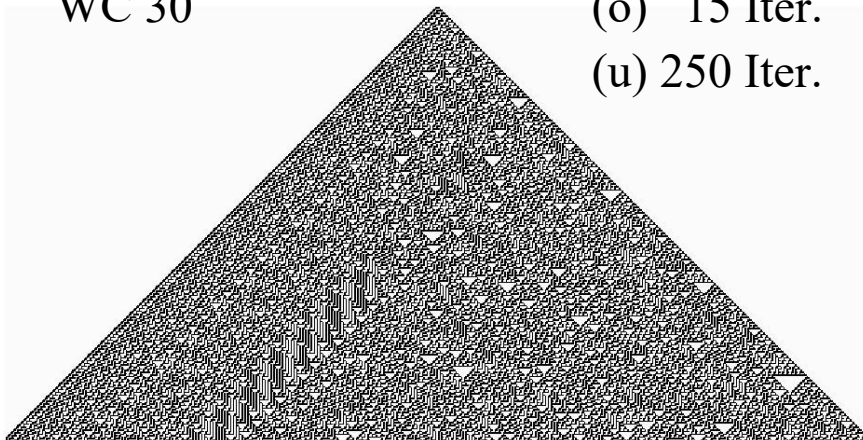
Zellularautomaten



WC 30

(o) 15 Iter.

(u) 250 Iter.



Für $|S| = 2$ und $|v| = 2$ gibt es 256 verschiedene 1-d ZAs:

$2^3 = 8$ Regeln, $2^8 = 256$ ZAs.

Manche ZAs „sterben aus“, manche produzieren regelmäßige Muster, aber interessanterweise zeigen andere ein zunächst chaotisches Verhalten.

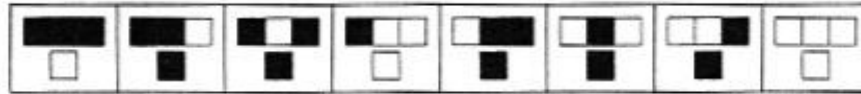
Eine grundlegende Erkenntnis: Einfache Regeln können komplexes Verhalten generieren.

Es ist nicht offensichtlich, welche Regeln zu überraschendem Verhalten führen und welche nicht.

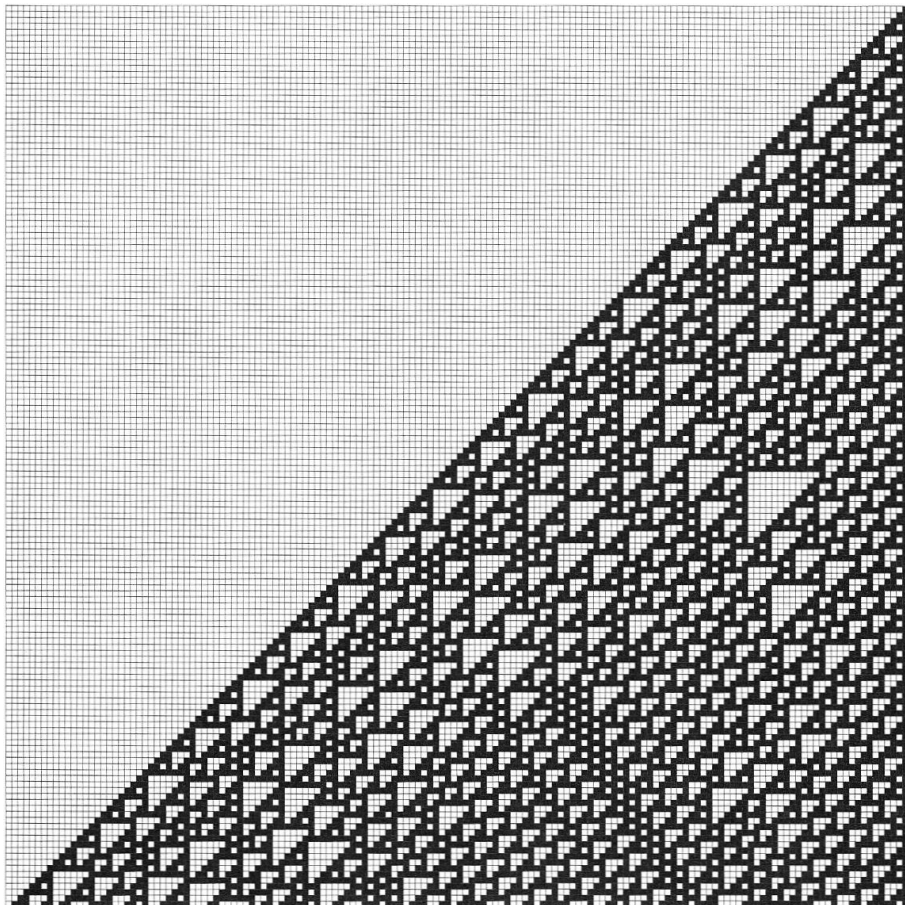
Quelle: S. Wolfram, *A new Kind of Science*, p.59

Zellularautomaten

WC 110:

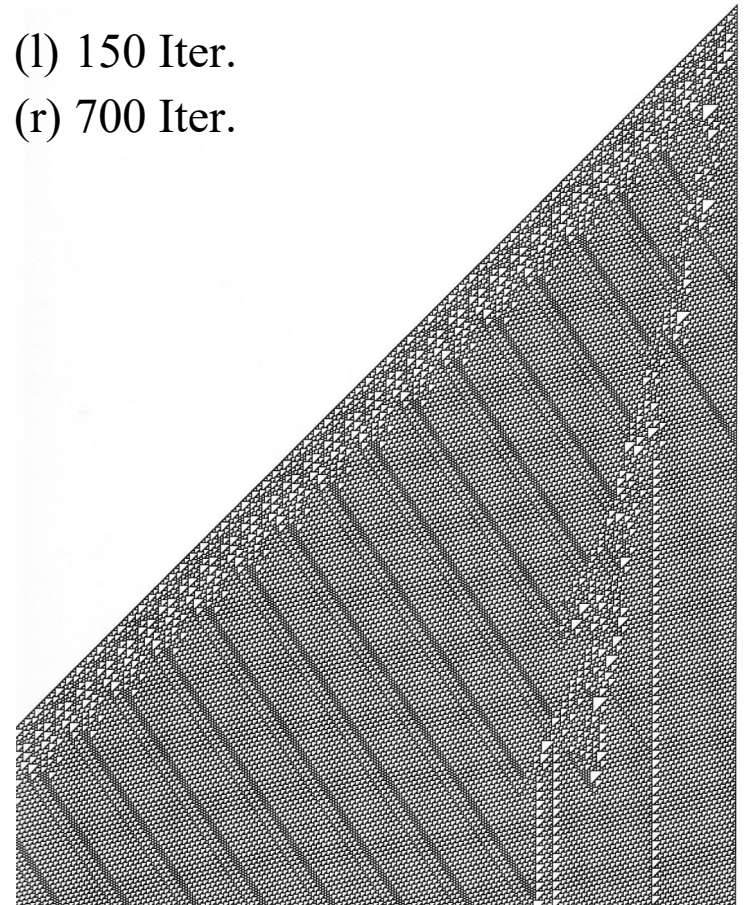


Quelle: S. Wolfram,
A new Kind of Science, p.32



(l) 150 Iter.

(r) 700 Iter.



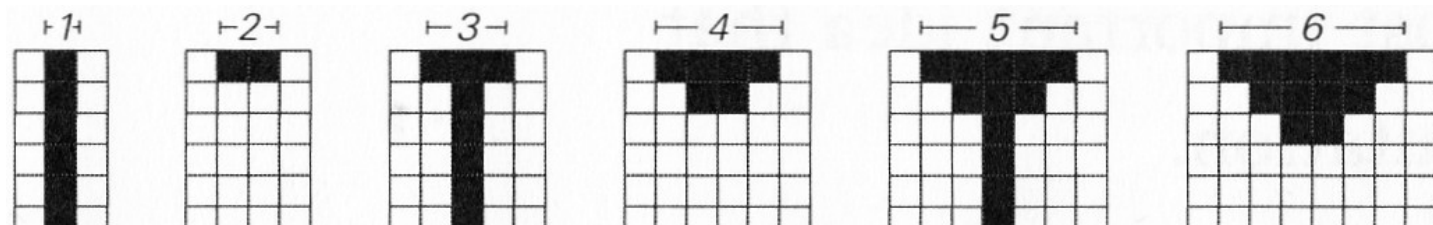
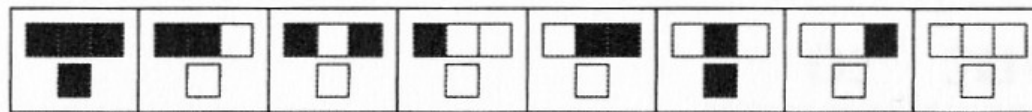
Zellularautomaten sind von ihrer Mächtigkeit her äquivalent zur TM. Auf einen Beweis (M. Cook, 1998/2004) sei hier verzichtet, aber als Intuition die Analogie zur TM:

Ein 1-d ZA lässt sich als Band auffassen, auf dem Einsen und Nullen (= tot / lebendig) parallel verarbeitet werden.

Zur gezielten Manipulation des Bandinhalts hat die TM ihre Übergangsfunktion, der ZA hat seine Regeln.

Folglich kennen ZAs auch nicht-berechenbare Probleme, z.B.: Es kann keinen Algorithmus geben, der als Eingabe zwei beliebige ZA-Konfigurationen erhält und immer entscheiden kann, ob die eine Konfiguration aus der anderen entstehen kann oder nicht.

Berechnungen mit 1-d ZAs: Modulo 2



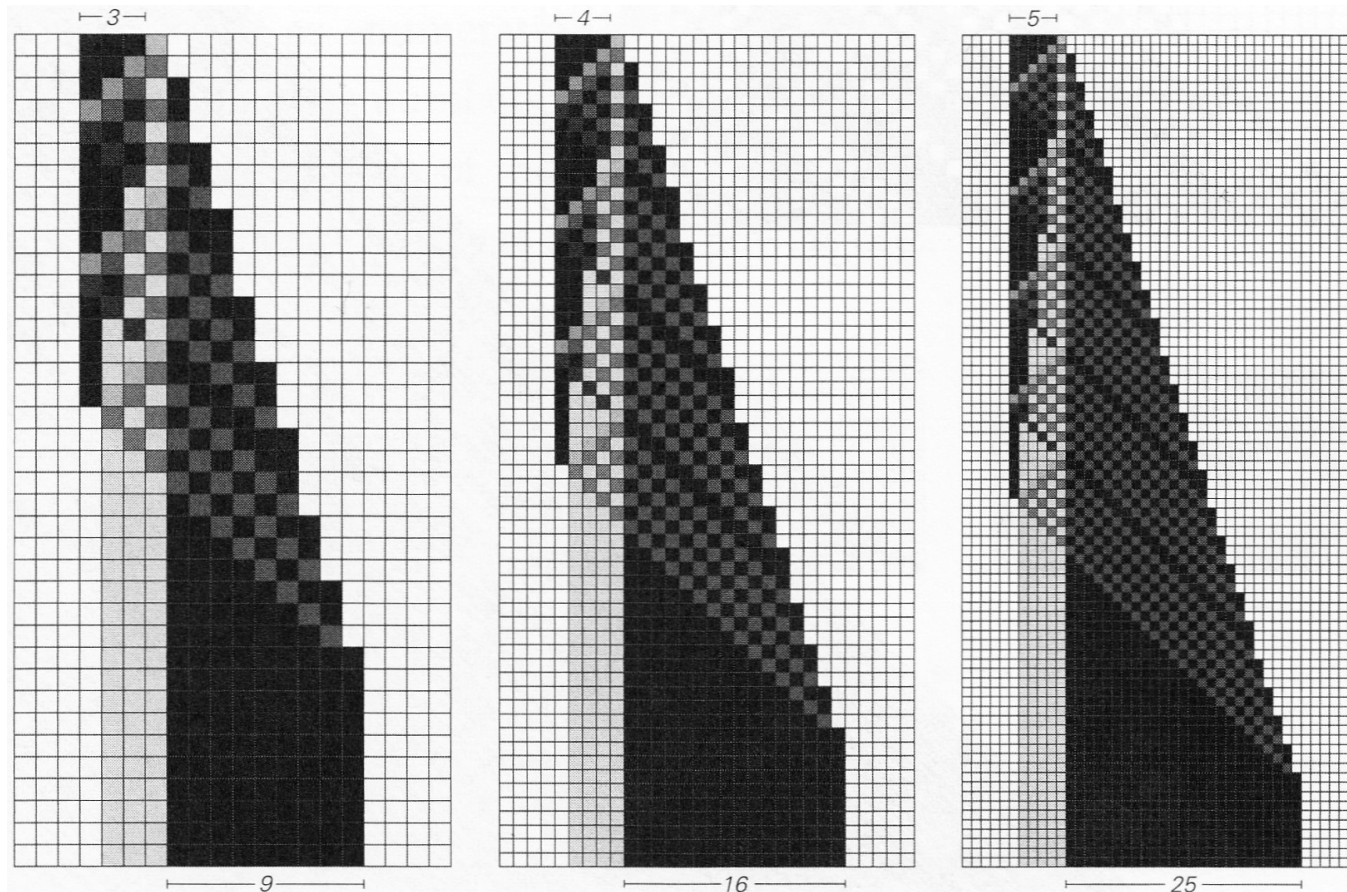
Quelle: S. Wolfram, *A new Kind of Science*, p.638

Der obige ZA, WC 132, berechnet den Rest bei Division durch 2.

Das Ergebnis der Berechnung (= Anzahl der lebendigen Zellen pro Zeile) kann abgelesen werden, sobald sich das erzeugte Muster nicht mehr ändert.

Zellularautomaten

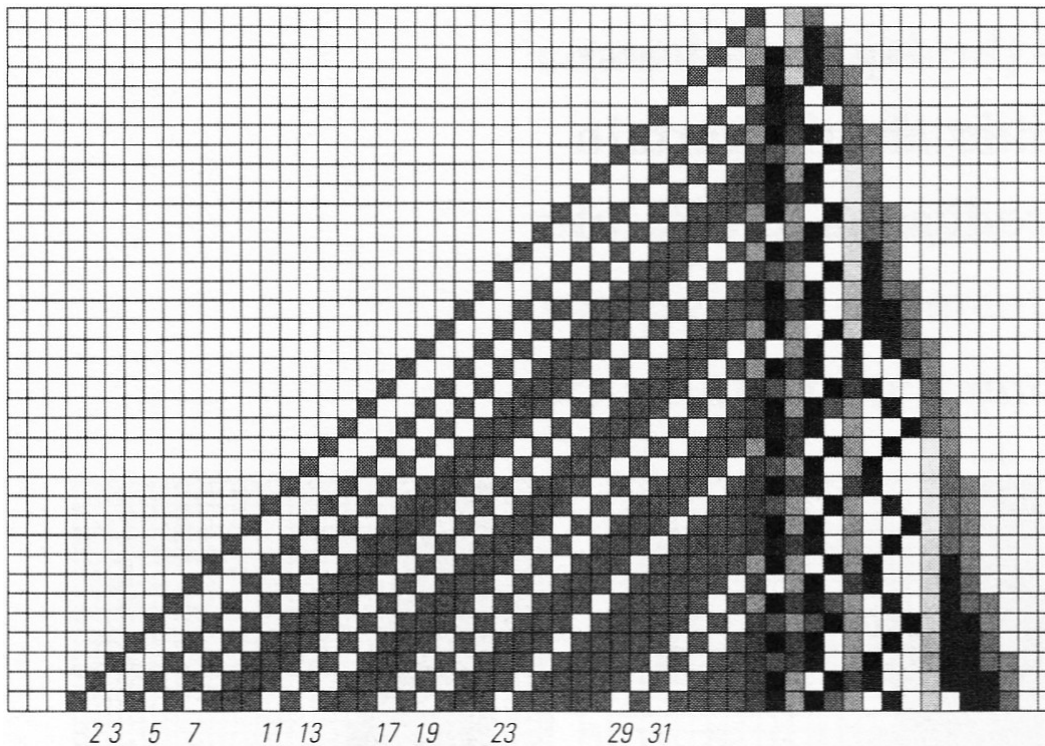
Berechnungen mit 1-d ZAs: Quadrierung



$|S| = 8$ mit
512 Regeln;
eine graue
Zelle als
„Starthilfe“.

Quelle: S. Wolfram, *A new Kind of Science*, p.639

Berechnungen mit 1-d ZAs: Primzahlen



Dieser ZA berechnet Primzahlen nach dem Sieb des Eratosthenes. Er verwendet $|S| = 16$, also $16^3 = 4096$ Regeln.

Quelle: S. Wolfram, *A new Kind of Science*, p.640

Das **Spiel des Lebens** ist ein 2-d ZA mit $v = 8$ -er Nachbarschaft, $S = \{\text{tot, lebendig}\}$ und folgenden Regeln:

- Bei mehr als drei lebenden Nachbarn stirbt die Zelle („Überbevölkerung“).
- Bei weniger als zwei lebenden Nachbarn stirbt die Zelle („Vereinsamung“).
- Bei zwei oder drei lebenden Nachbarn lebt die Zelle weiter („Stabilität“).
- Bei genau drei lebenden Nachbarn wird eine tote Zelle lebendig („Fortpflanzung“).

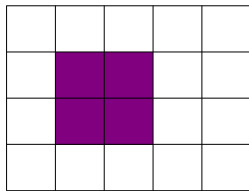
Die Startkonfiguration wird willkürlich ausgewählt (das ist der Witz!).

Ziel: Startkonfigurationen austüfteln, die nicht nur ewig überleben, sondern sogar unbegrenzt wachsen.

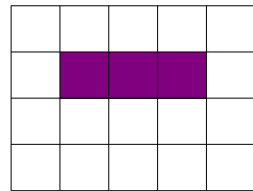
Zellularautomaten

Ähnliche Anordnungen von Zellen können auch hier ein sehr unterschiedliches Verhalten zeigen. So gibt es beispielsweise stabile Konfigurationen genauso wie oszillierende, gleitende, absterbende, expandierende oder selbstreproduzierende.

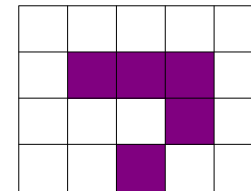
Beispiele:



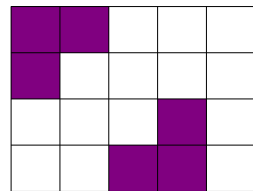
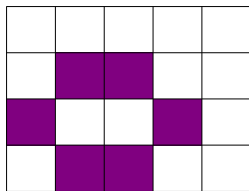
Stabil



Oszillierend

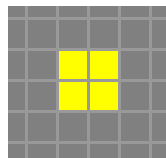


Gleitend (nach
rechts oben,
Periode 4)

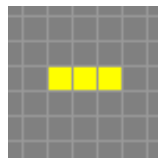


Zellularautomaten

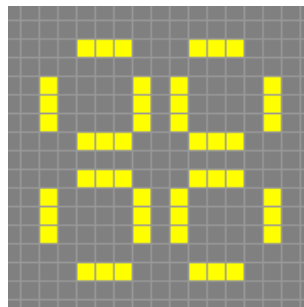
Ein **Oszillator** ist ein Muster, das sich nach einer bestimmten Anzahl von Generationen (= Periodenlänge p) wiederholt.



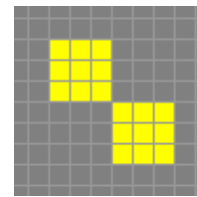
(p1)
Block



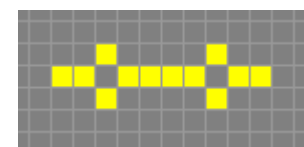
(p2)
Blinker



(p3) Pulsar



(p8)
Figure
Eight



(p15)
Penta-
Decathlon

Das Spiel des Lebens ist **omniperiodisch**, d.h. zu jeder Periodenlänge p lässt sich ein Oszillator finden, der genau diese Periodenlänge hat.

Die letzten Oszillatoren (p19 und p41) wurden 2023 gefunden. Wer es genau wissen will: N. Brown et al., *Conway's Game of Life is Omniperiodic*, arXiv 2023.



(p30)
Queen Bee
Shuttle

Zahlreiche Varianten von Zellularautomaten sind denkbar:

- Andere Dimensionalität des Gitters
- Mehr als zwei Zustände pro Zelle
- Andere Nachbarschaften (größer; kreisförmig; hexagonal; etc.)
- Andere Auswertungsregeln, z.B. die Mehrheitsregel:
Eine Zelle wird oder bleibt lebendig, wenn ≥ 5 Nachbarzellen lebendig sind, ansonsten stirbt die Zelle oder bleibt tot
- Stochastische Regeln
- usw.

Langtons Ameise (1986)

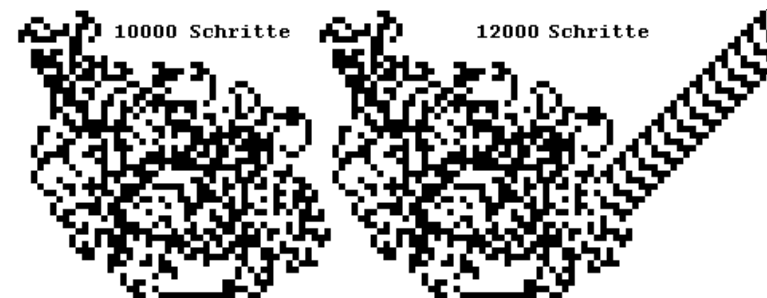
Langtons Ameise ist eine Turingmaschine, die sich auf einem unendlichen 2d-Gitter nach folgenden Regeln bewegt:

- Auf einem weißen Feld drehe Dich um 90° nach rechts, auf einem schwarzen Feld um 90° nach links.
- Ändere die Farbe des Feldes.
- Gehe in Laufrichtung zum nächsten Feld.

Zu Beginn ist das Gitter weiß oder mit selektierten schwarzen Feldern vorbesetzt.

Nach etwa 10000 eher chaotisch wirkenden Schritten baut die Ameise eine regelmäßige unendliche „Ameisenstraße“.

.	-	◡	◢	◣	◤	◥	◦	◧	◨	10
◩	◪	◵	◶	◷	◸	◹	◺	◻	◼	20
◽	◾	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	30
◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	40
◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	50
◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	◿	60



Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Ameise_\(Turingmaschine\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Ameise_(Turingmaschine))

Autor: Karl Bednarik, CC BY-SA 3.0



Die Spiele der „Großen“: Krieg, Auktionen, Verhandlungen, Liebe, ...

Spieltheorie

Spiele im Sinne der Spieltheorie sind **strategische** (= plangesteuerte) **Mehrpersonenspiele** im weitesten Sinne (≠ zweckfreie Glücks- und Unterhaltungsspiele).

Gegenstand der Spieltheorie sind **Entscheidungssituationen**, in denen das Ergebnis nicht nur von der eigenen Entscheidung, sondern auch vom **Verhalten anderer Entscheider** abhängt (⇒ soziale Interaktion, **Konflikte**).

Die Spieltheorie untersucht also die strategische Interaktion zwischen vernunftbegabten Entscheidern.

Spieltheorie

Es wird i.d.R. angenommen, dass die Spieler **rational** sind und (nur) ihren Gewinn maximieren wollen.

Die **Spielregeln** sind meistens allen Spielern bekannt. Man spricht dann von **vollständiger Information**.

Bei **perfekter Information** kennt jeder Spieler das komplette Spielgeschehen, inkl. Zufallsentscheidungen. Schach und Mensch ärgere Dich nicht (trotz Würfels!) haben perfekte Information, Skat und Schafkopf hingegen nicht.

Eine **Lösung** des Spiels besteht aus einem Vorschlag, wie das Spiel gewinnmaximierend zu spielen sei. Die möglichen **Spielzüge** sind die Handlungsoptionen der Spieler.

Die Spieltheorie ist die westliche Theorie des Konflikts.

C. Rieck

*„Ein Spiel ist die Gesamtheit der Regeln,
die es beschreiben.“* J.von Neumann

Das klassische Beispiel der Spieltheorie ist das **Gefangenendilemma**:

Zwei Untersuchungshäftlinge, A und B, welche nicht miteinander kommunizieren können, werden einer gemeinsamen Straftat verdächtigt.

- Wenn beide dicht halten, dann werden beide wegen kleinerer (aber nachweisbarer) Vergehen zu jeweils zwei Jahren Gefängnis verurteilt.
- Verpfeift A aber B, so kommt A als Kronzeuge frei und B für 25 Jahre ins Gefängnis; entsprechendes gilt, wenn B den A verpfeift.
- Verpfeifen sich A und B gegenseitig, so müssen beide für 20 Jahre ins Gefängnis.

Darstellung als **Auszahlungsmatrix**:

Knastjahre	B schweigt	B verpfeift
A schweigt	A:2, B: 2	A:25, B: 0
A verpfeift	A:0, B:25	A:20, B:20



Das Dilemma ist offensichtlich: Kollektiv ist die Haftstrafe am geringsten ($2 + 2 = 4$ Jahre), wenn A und B schweigen.

Aber: A steht *immer* günstiger da, wenn er B verpfeift (unabhängig davon, was B tut) – und dasselbe gilt für B!

⇒ Die **dominante Strategie** in diesem Fall ist also sowohl für A als auch für B, nicht miteinander zu kooperieren.

Das **Trittbrettfahrer-Dilemma**: Drei Spieler A, B, C können einen fixen Beitrag anonym in einen Gemeinschaftstopf werfen. Ein Philanthrop verdoppelt den eingezahlten Gesamtbetrag. Danach wird dieser unter allen Spielern zu gleichen Teilen aufgeteilt. Auszahlungsmatrix (+ = Spieler zahlt; - = Spieler zahlt nicht):

Auszahlung pro Spieler	B +, C +	B +, C -	B -, C +	B -, C -
A +	2 [1]	1.33 [0.33]	1.33 [0.33]	0.66 [-0.34]
A -	1.33 [1.33]	0.66 [0.66]	0.66 [0.66]	0 [0]

[In eckigen Klammern: Gewinn = Auszahlung - Einzahlung von A]

⇒ Soziales Dilemma: Dominante Strategie = Trittbrettfahren.

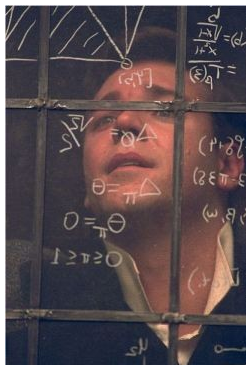
Es besteht die Chance, Beiträge aus dem Gemeinschaftstopf zu erhalten, ohne in diesen eingezahlt zu haben.

Die kollektiv beste Lösung wird dadurch jedoch verfehlt.

Kooperative Lösungen scheitern in diesen Dilemmata daran, dass sich einzelne Spieler durch eigenmächtiges Abweichen verbessern können.

Eine stabile (aber oft nicht die „sinnvollste“) Situation, in der keiner der Spieler sich durch einen Wechsel der Strategie verbessern kann, wird **Nash-Gleichgewicht** genannt.

Das Nash-Gleichgewicht existiert für Zwei-Personen-Spiele immer, muss aber nicht eindeutig sein. Seine Berechnung ist ein hartnäckiges Problem, genauso wie die Frage nach seiner Eindeutigkeit.



John Nash, US-Mathematiker, 1928 - 2015.

1994 „Preis für Wirtschaftswissenschaften der schwedischen Reichsbank im Gedenken an Alfred Nobel“ (fälschlicherweise oft „Nobelpreis“)

Verfilmung: *A Beautiful Mind*, 2001.

Bsp. Nash-Gleichgewicht (Variante des **Cournot-Spiels**):
Spieler A und B haben das gleiche Produkt am Markt. Je nachdem, ob sie sich gering, mittel oder stark im Markt engagieren, können die Spieler mit folgenden Gewinnen rechnen:

Gewinn	B - gering	B - mittel	B - stark
A - gering	18, 18	15, 19	9, 21
A - mittel	19, 15	16, 16	11, 15
A - stark	21, 9	15, 11	9, 9

Das kollektive Maximum befindet sich bei (gering, gering) = 36.

Das Nash-Gleichgewicht befindet sich jedoch bei (mittel, mittel), da dort jede Änderung der Strategie den Gewinn von 16 auf 15 reduziert, und zwar bei jedem Spieler.

Beim Trittbrettfahrer-Dilemma ist das Gleichgewicht bei (-, -, -).

Zwei Eisverkäufer verkaufen am Strand Eis der gleichen Qualität zum gleichen Preis.

Wo liegt das Nash-Gleichgewicht (d.h. wo stellen sich die Eisverkäufer auf), wenn das gleichverteilte Strandvolk immer zum nächst gelegenen Eisverkäufer geht?



Das **Ultimatumspiel**

Einem Spieler A stehen 100 € zur Verfügung. Von diesem Betrag kann er einem Spieler B einen Teil x anbieten.

Spieler B kann dieses Angebot

- annehmen. Dann behält A $(100-x)$ € und B erhält x €.
- ablehnen. Dann erhalten beide Spieler nichts.

► *Wie wählen Sie x , wenn Sie Spieler A sind?*

Variante (Diktatorspiel): Spieler B kann Vorschlag nicht ablehnen.

Wiederholte Spiele

Interessanter und realistischer wird ein Spiel, wenn es mehrfach hintereinander (**iteriert**) mit denselben Spielern gespielt wird.

In diesem Falle merken sich die Spieler, wie sich der jeweils andere Spieler verhalten hat, und richten ihre Strategie danach aus.

Nicht-Kooperation zahlt sich jetzt nicht mehr aus, da kein Spieler zukünftig mit einem solchen Spieler kooperieren wird.

Die Strategie „**Wie Du mir, so ich Dir**“ („*Tit for Tat*“, Reziprozität) ergibt einen deutlich höheren Gesamtgewinn.

Beispiele: Produktionsmengenabsprachen (z.B. OPEC-Ölkartell); Handel per Vorkasse (z.B. eBay, Internethändler).

Evolutionstheorie und Spieltheorie

Die Spieltheorie erklärt, warum selbstloses, mitfühlendes Verhalten mit einer Kernaussage der Evolutionstheorie, *Survival of the fittest* (die Bestangepassten haben Erfolg), vereinbar ist:

Der Bestangepasste („Stärkste“) ist derjenige, der kooperiert und somit immer den höchsten Gewinn einsteckt.

Nicht wegen herausragender individueller Fähigkeiten hat Homo Sapiens das Rennen gemacht, sondern weil sich Individuen zu Gruppen mit gemeinsamen Zielen zusammen schließen konnten.

Das Gefangenendilemma und zahlreiche andere Spiele sind **keine Nullsummenspiele** \Rightarrow „*Win-win*“ anstreben statt Niedermetzeln!

Ökonomie und Spieltheorie

Koutsoupas und Papadimitriou (1999) haben vorgeschlagen, das Verhältnis

Schlechtestes Nash-Gleichgewicht / Kollektives Optimum als Maß für die Effektivität eines Systems zu verwenden.

Dieses Maß wird auch als **Preis der Anarchie** bezeichnet. Je komplexer das System, desto höher der Preis.

Dieser Preis der Anarchie widerlegt die (neo-) liberale These, dass der freie Markt schon alles optimal richten wird.

Zum Weiterlesen: Essays von C. Rieck auf <http://www.spieltheorie.de/>:

- Ebay-Bietstrategien - wieviel soll man bei Ebay bieten?
- Sollen sich private Gläubiger an Staatspleiten beteiligen?
- Wieviele Steuerfahnder braucht das Land? Nur nicht zu viele!
- Wieso ein Benzinpreis von 5 Euro richtig wäre.
- Studiengebühren - zwischen Steuern und Steuerung.
- Mobilfunk: Wenn Wettbewerb schadet.
- VW trickst nicht bei den Abgaswerten – sondern baut ein rationales Auto.
- usw.

Außerdem: Links auf seinen [YouTube-Kanal](#) – hochgradig unterhaltsam.

Eine Variante der algorithmischen Spieltheorie ist das **Mechanismus-Design**.

Ziel: Systeme („Spiele“) so zu entwerfen, dass sie möglichst nützlich sind, auch wenn die einzelnen Teilnehmer („Spieler“) eigennützig sind und über private Informationen verfügen.



Quelle: G. Anthes, CACM Aug. 2010

Die DARPA hat 2009 folgende *Network Challenge* organisiert:

Es sollten in möglichst kurzer Zeit die Positionen von 10 roten Ballons ermittelt werden, welche irgendwo in den USA ausgebracht wurden.

Der Gewinner erhält 40 000 \$ Preisgeld.

► *Wie sieht eine siegversprechende Strategie für dieses Problem aus?*