Praktikum V – Zufallszahlen; Warteschlangen

GTI SoSe 2015 Prof. A. Siebert

Aufgabe 1. Exponentialverteilte Zufallszahlen.

Generieren Sie in Java n=100000 exponentialverteilte Zufallszahlen mit $\alpha = 2$. Überzeugen Sie sich davon, dass sowohl der Durchschnittswert als auch die Standardabweichung Ihrer Zahlen ganz dicht bei $1/\alpha$ liegt.
Wiederholen Sie Ihre Berechnungen für unterschiedliche Zufallszahlen und für unterschiedliche Werte von α.

Die Standardabweichung s ist definiert als

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2} \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Die Berechnung der Standardabweichung gemäß der obigen Formel erfordert zwei Durchläufe durch die Datenmenge, weil zunächst der Durchschnitt μ über alle Daten ausgewertet werden muss.

Eine mathematisch äquivalente Berechnung der Standardabweichung gemäß

$$s = \sqrt{\left(n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2\right) \Big/ n(n-1)}$$

ist in einem einzigen Durchlauf machbar, kann aber schnell zu einem Überlauf führen. Donald Knuth (TAoCP II/p.232) empfiehlt daher folgendes rekursives Vorgehen:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= x_1 \\
\mu_i &= \mu_{i-1} + \frac{x_i - \mu_{i-1}}{i} \\
S_1 &= 0 \\
S_i &= S_{i-1} + (x_i - \mu_{i-1}) \cdot (x_i - \mu_i)
\end{aligned}$$

mit $s = \sqrt{S_n/(n-1)}$.

Berechnen Sie also die Standardabweichung gemäß Knuth (Vorsicht: In den Formeln gehen die Zahlenindizes von 1 bis n, nicht von 0 bis n-1).

Zur Kontrolle: Die Standardabweichung der Zahlenfolge 1..10 ist 3.027650354.

Sie können auch gerne (freiwillig) noch verifizieren, dass die Schiefe Ihrer Zahlen gleich 2 und die Wölbung gleich 9 ist, unabhängig von α, siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Exponentialverteilung`.

Aufgabe 2. Wartesysteme.

Verifizieren Sie das Gesetz von Little mit einer Java-Simulation.
Generieren Sie also Zwischenankunfts- und Abfertigungszeiten eines Wartesystems und protokollieren Sie für jeden Konsument dessen Wartezeit und die jeweilige Länge der Warteschlange.
Vergleichen Sie Ihre empirischen Daten mit den theoretischen Vorhersagen.

Unser Wartesystem ist **M** / **M** / 1.
Die Zwischenankunftszeiten sind exponentialverteilt mit der Ankunftsrate λ.
Die Abfertigungszeiten sind exponentialverteilt mit der Bedienrate μ.
Für die Auslastung $\rho = \lambda/\mu$ muss gelten $\rho < 1$.

Wir wollen verifizieren:

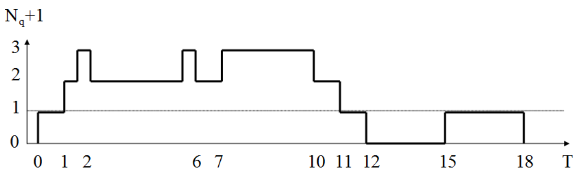
- $E[N_q] = \rho^2/(1-\rho)$
- $E[N_q] = E[T_w] \cdot \lambda$

Für λ=3.0 und μ=4.0 ergibt sich ρ=0.75 mit $E[N_q]$=2.25 und $E[T_w]$=0.75.

Generieren Sie jeweils n=100000 Zwischenankunfts- und Bedienzeiten.

Simulieren Sie zunächst zu Testzwecken das Beispiel aus dem Skript.

i	0	1	2	3	4	5
$T_A(i)$	0.0	1.0	0.5	4.0	1.5	8.0
$T_B(i)$	2.0	4.0	4.0	1.0	1.0	3.0
$T_{Ank}(i)$	0.0	1.0	1.5	5.5	7.0	15.0
$T_{Anf}(i)$	0.0	2.0	6.0	10.0	11.0	15.0
$T_{End}(i)$	2.0	6.0	10.0	11.0	12.0	18.0
$T_W(i)$	0.0	1.0	4.5	4.5	4.0	0.0



Hier muss das Ergebnis $E[T_w]$=2.333 und $E[N_q]$=0.777 sein. (In diesem Beispiel sind λ und μ unbekannt.)

Wiederholen Sie Ihre Berechnungen für unterschiedliche Zufallszahlen und für unterschiedliche Werte von λ und μ.

Geben Sie für $E[T_w]$ und $E[N_q]$ jeweils an, um wieviel Prozent Ihre empirischen Daten von der theoretischen Vorhersage abweichen.

Notieren Sie auch die längste beobachtete Warteschlange. Für λ=3.0, μ=4.0 und n=100000 sollte die längste Warteschlange ungefähr 30 Konsumenten umfassen.