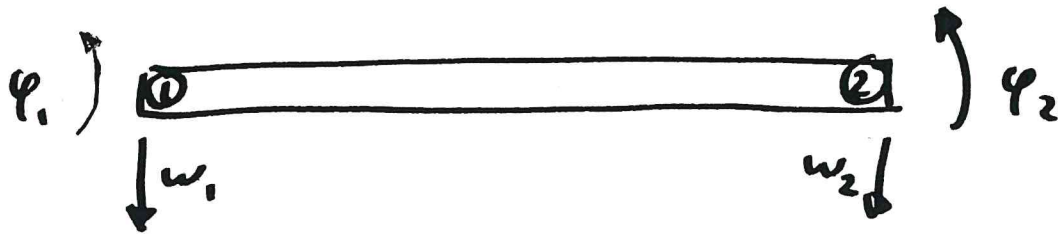


Ballen - Element

- Belastung und Verschiebung
quer zur Ausdehnungsachse

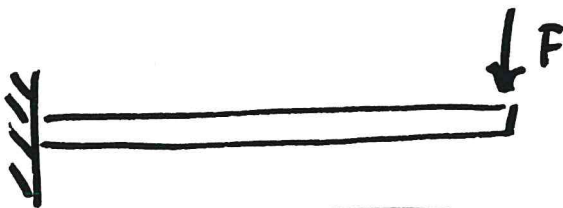


Freiheitsgrade an den Enden:

- Absenkung w , entspricht einer Querbelastrung (\Rightarrow Querkraft)
- Verdrehung φ , entspricht einem Belastungsmoment.

Strukturelement

→ Theorie der Biegelinie

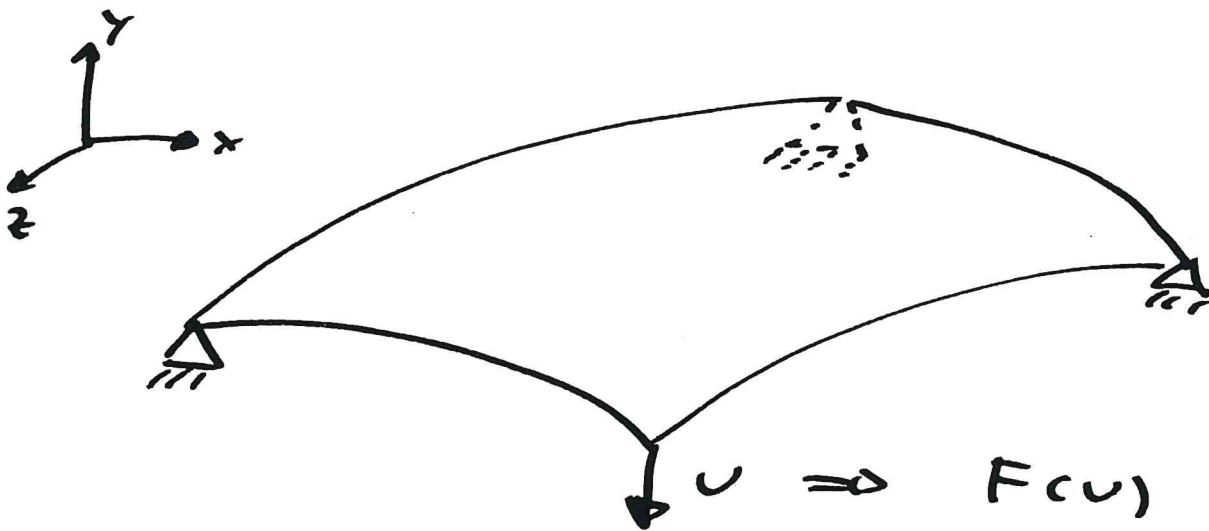


Hinweis: für kleine Verformungen gilt

$$\varphi \approx \sin(\varphi)$$

Platten und Schalen

dünnwandige Strukturen, die bezüglich einer Verdrehung aus ihrer Ebene heraus eine Steifigkeit aufweisen (vergl. Balken)

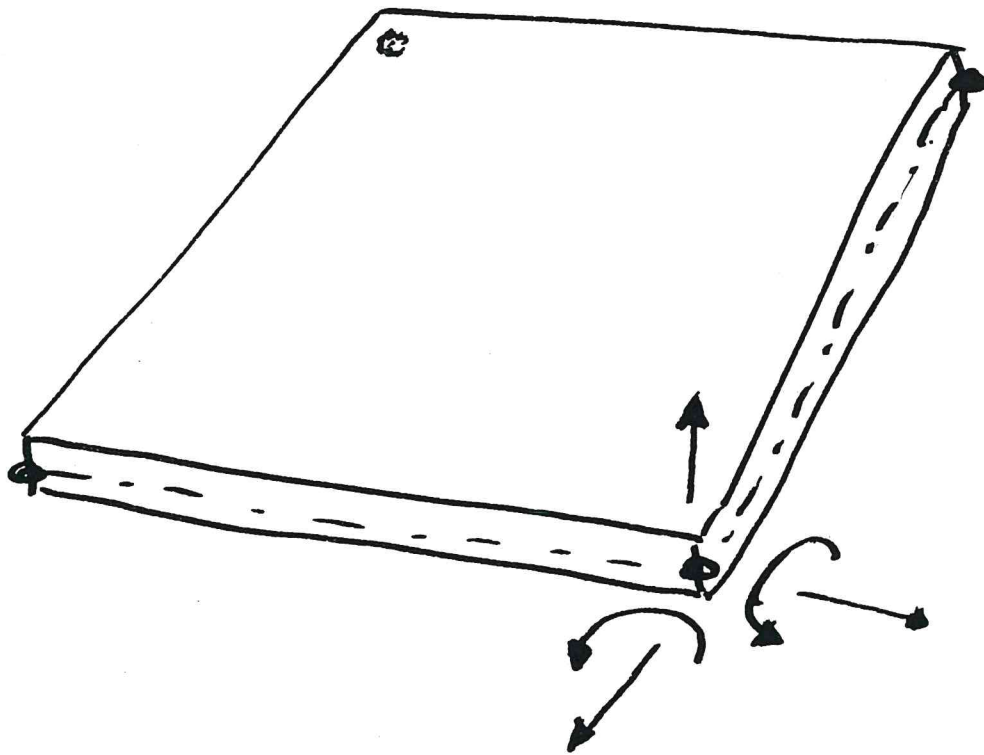


Platten - ebene Strukturen,
der Biegeanteil dominiert.

Schalen - gewölbte Strukturen,
der Membrananteil dominiert.

Schalenelemente

z.B. 4 Knoten (Quad 4)



5 Freiheitsgrade pro Knoten

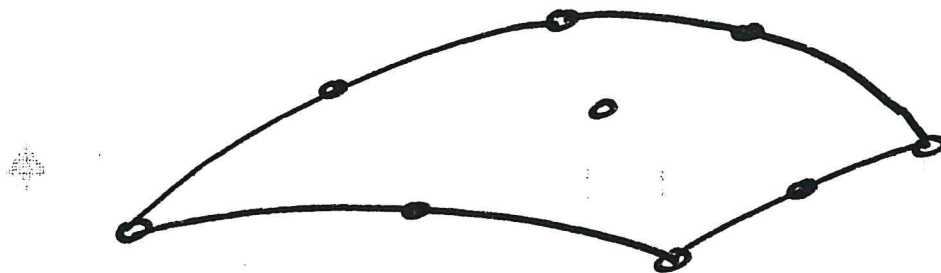
3 Translation, 2 Verdrehungen (aus der Schalenebene heraus)

der 6. Freiheitsgrad (Verdrehung in der Schalenebene) hat in der Regel keine Steifigkeit.

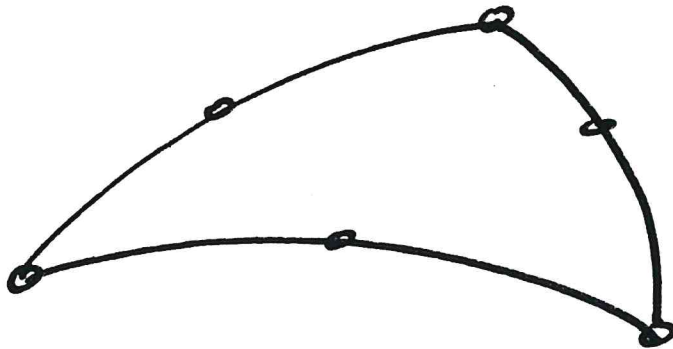
auch

- als Dreiecke, lin. od. quadratisch (d.h. mit Mittelknoten)
- als Vierecke, lin. od. quadratisch (d.h. mit Mittelknoten)

Schalen- / Platten-Elemente mit
mehreren Knoten



als Viereck

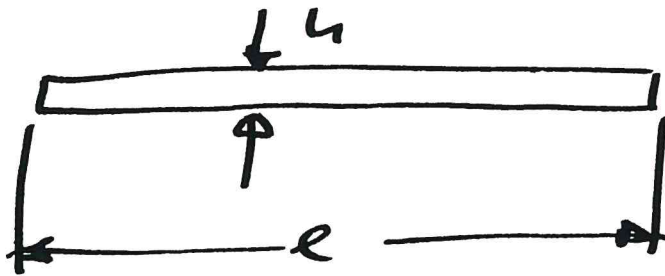


als Dreieck

mögliche Theorien:

- Unter Vernachlässigung des Schub einflusses,

falls $l/h > 10$



Verformung durch Biegung
dominiert

⇒ Theorie nach

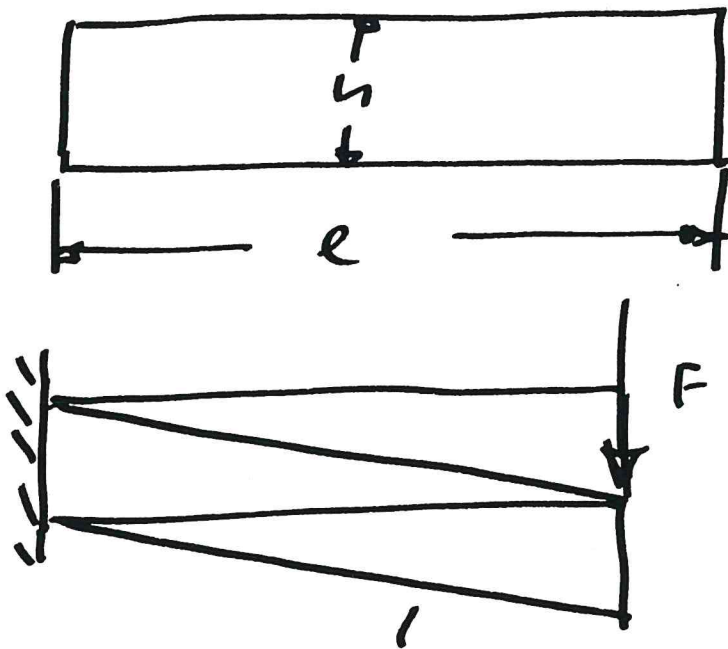
- Euler / Bernoulli
- Kirchhoff

für lange schlanke Balken

und "dünne" Platten

- unter Beachtung des Schub einflusses

falls $l/h < 10$



Verformung durch Schub dominiert

⇒ Theorie nach

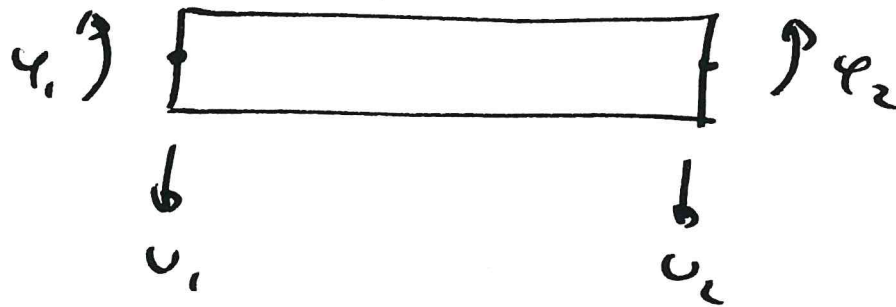
- Timoshenko
- Reissner/Mindlin

für kurze dicke Balken

und "dicke" Platten sowie Schalen

Mindlin - Element

- kurz und dick
- mit Schubanteil



- gegebenenfalls Kopplung
von Zug/Torsions- und Biegeanteil

Kirchhoff - Element

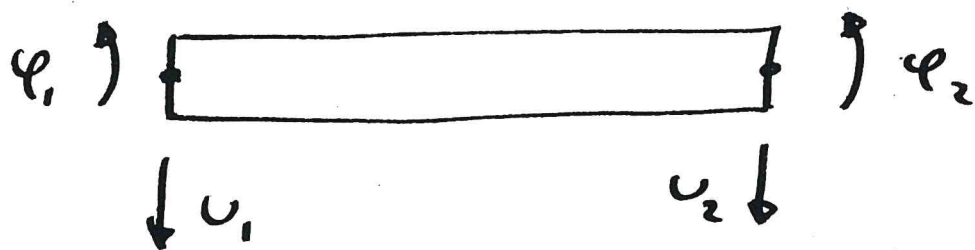
- lang und schlank
- ohne Schubanteil



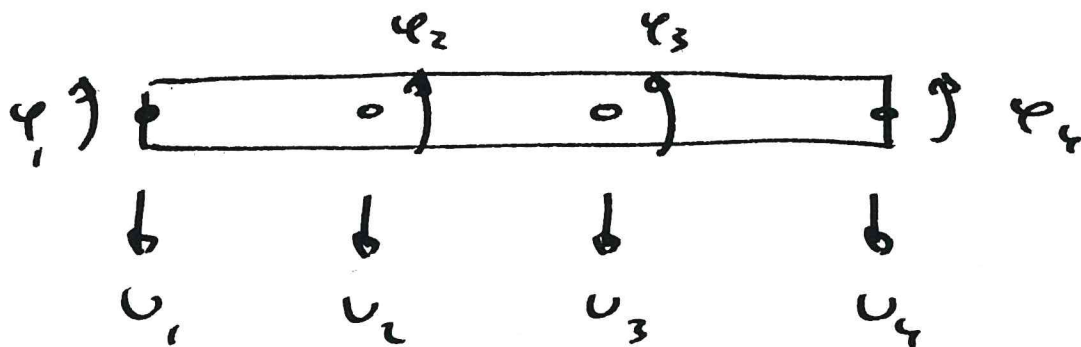
- Zug/Torsions - Anteil i.d.R.
durch Überlagerung von entsprechenden
Elementen.

Balken Element

- formuliert in der Ebene



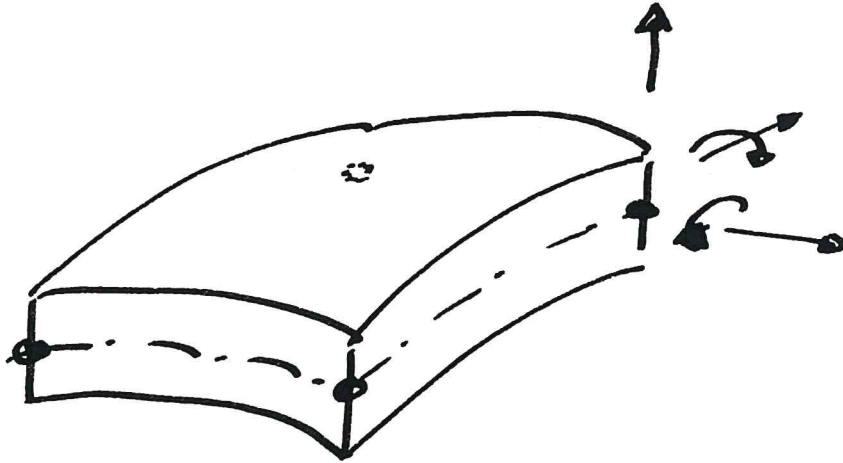
- auch mit mehreren Knoten



- Häufige Balkenelemente entstehen durch die "Überlagerung" mehrerer ebener Elemente
 - Balken in der $(x-y)$ -Ebene
 - Balken in der $(x-z)$ -Ebene
 - Zugstab entlang der Balken-Achse
 - Torsionsstab entlang der Balken-Achse

Mindlin - Element

- kurz und dick
- mit Schubanteil



- gegebenenfalls Kopplung von Membran- und Biegeanteil

Kirchhoff - Elemente

- lang und schlank
- ohne Schubanteil



- Membrananteil i.d.R. durch Überlagerung von Membranelement.

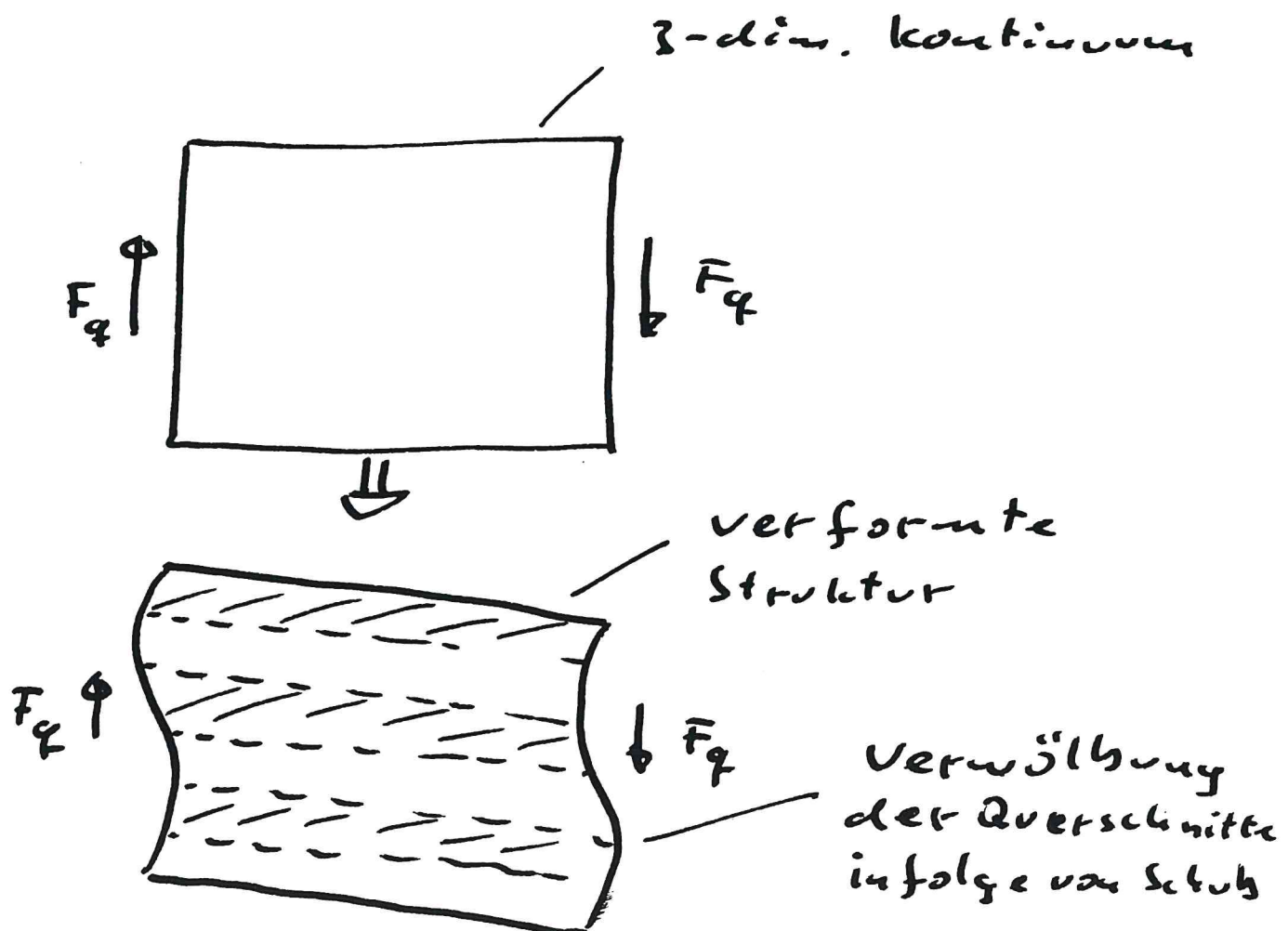
Verschiedene Theorien

→ verschiedene Elemente

Allgemeiner Fall:

das 3-dimensionale Kontinuum

Sämtliche Verformungen sind möglich, z.B. auch Verwölbungen der Querschnitte infolge von Querbelastungen.



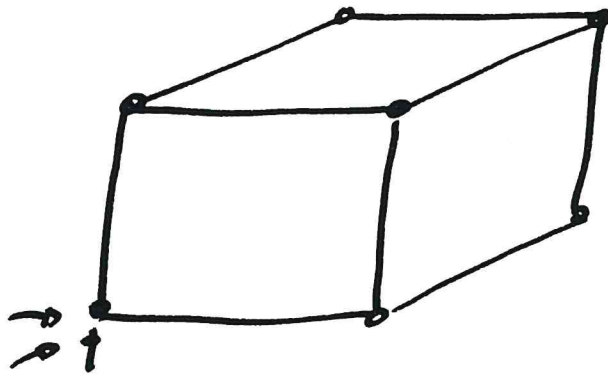
Anwendung:

3-dimensionale Kontinuumelemente

vom Typ Lagrange

und Verallgemeinerungen hiervon

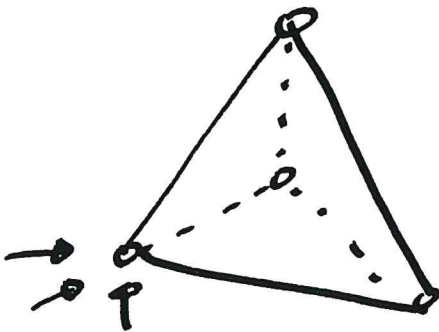
3 Freiheitsgrade pro Knoten



z. B.

$2 \times 2 \times 2$ Lagrange

(Brick-Element)

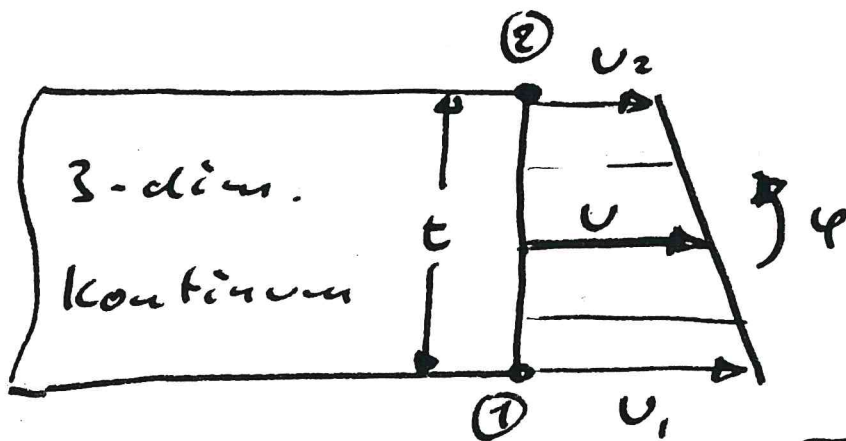


z. B.

3-dim Simplex

(Tetraeder-Element)

Übergang vom 3-dim. Kontinuum
auf das 2-dim. Schalenkontinuum

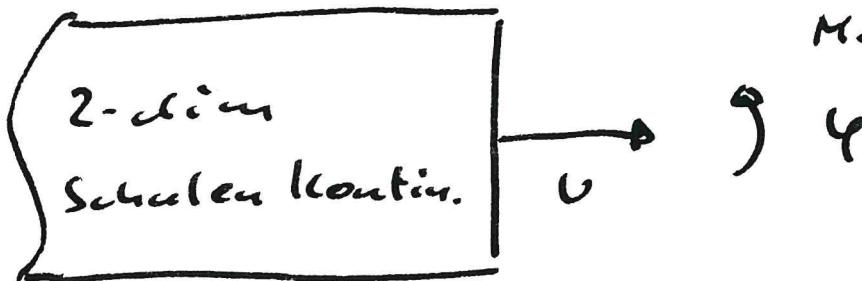


$$v = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)$$

$$\varphi = \frac{v_2 - v_1}{t}$$



Kopplung von
Verdrehung und
Membranverschiebung



Absenkung als Mittelwert der
vertikalen Verschiebung der Knoten
① und ②:

$$v = \frac{1}{2} (v_1 + v_2)$$

⇒ Dickenänderung wird vernachlässigt.

Balken / Platten / Schalen - Theorie

1. Vereinfachung gegenüber dem Kontinuum

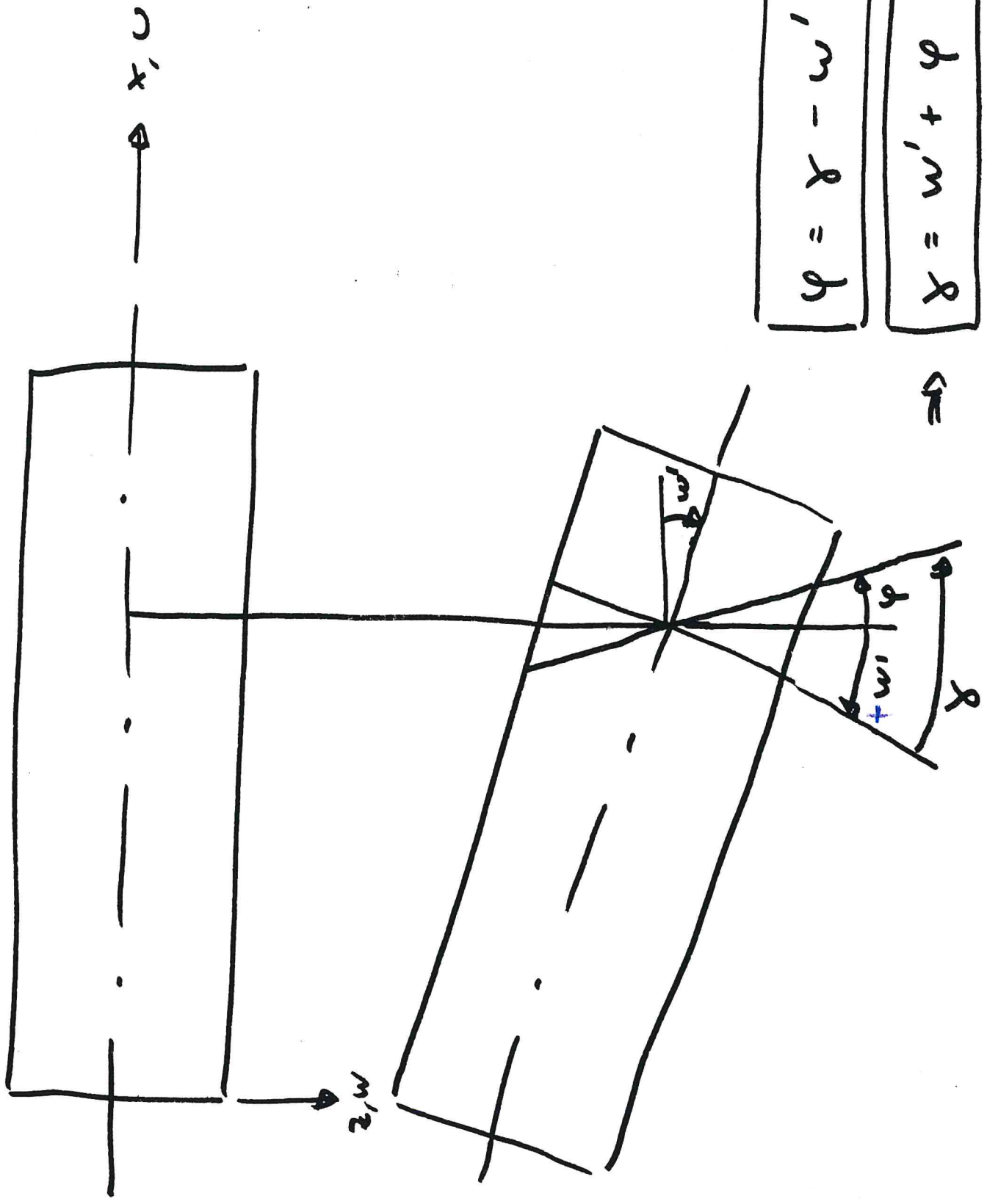
Querschnitte bleiben eben,
können sich aber verformen

→ Schubverformung und
Schubbeanspruchung treten auf

→ Theorie nach Reissner / Mindlin
bzw. Timoshenko

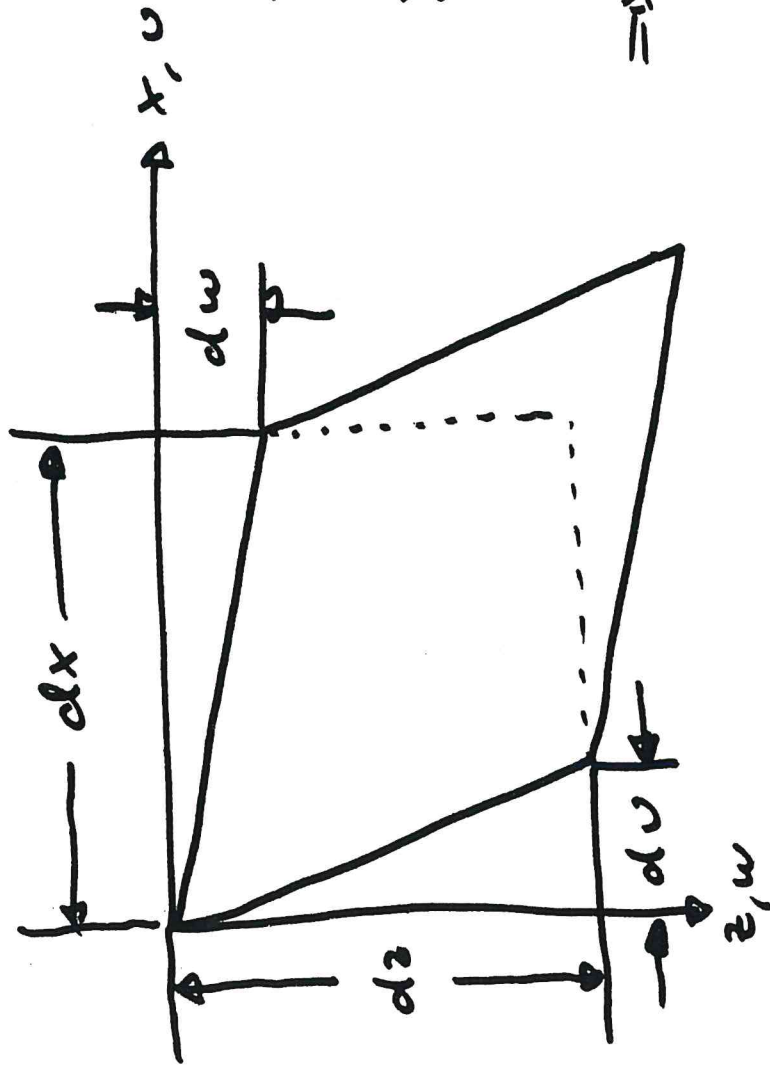
Beispiel: Balken

Abseitung des Balkens, Bezeichnungen



$\phi = \gamma - \omega'$	$\gamma = \omega' + \phi$
---------------------------	---------------------------

Schubverformung des Balkens in der (x-z)-Ebene



Schubdehnung

$$\gamma = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}$$

\Rightarrow

$$\boxed{\gamma = \frac{dw}{dx} + \varphi}$$

2. Vereinfachung

Theorie nach Euler / Bernoulli und Kirchhoff

Querschnitte bleiben eben,

können sich auch nicht verdrehen

\Rightarrow es tritt keine Schubdeformation
und auch keine Schubbeanspruchung
auf.

Diese Annahme trifft zu, wenn
das Schalenkontinuum ausreichend
dünn ist ($t < l/10$)

$$\gamma = 0$$
$$\Rightarrow \varphi = -w'$$